Министерство образования и науки Самарской области
государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение Самарской области
«Борский государственный техникум»

«Согласовано»
Руководитель МК
________О.П. Долгих
«31» августа 2021 г.
Протокол № _____
от «31» августа 2021 г.

Утверждаю
Зам. директора по УВР
________Е.М. Ковалева
«31» августа 2021 г.

C=RU, O="ГБПОУ СО ""Борский государственный техникум""",
CN=Беляев Александр Анатольевич,
E=bgt-borskoe@yandex.ru
009f615b92418b2d4a
2021.10.28 12:35:39+04'00'

Методические рекомендации
по выполнению практических работ по учебному предмету

ОУП.04_Математика
программы подготовки специалистов среднего звена

44.02.01 Дошкольное образование
(гуманитарный профиль)

с. Борское, 2021 г.

Методические рекомендации по выполнению практической работы по учебному предмету ОУД.04 Математика составлены на основе Федерального государственного образовательного стандарта, рабочей программы учебной дисциплины ОУП.04 Математика по программе подготовки специалистов среднего звена.

Организация-разработчик: ГБОУ СПО «Борский государственный техникум»

Разработчик: Н.С. Ромаева, преподаватель первой категории ГБОУ СПО «Борский государственный техникум»

Содержание

Пояснительная записка

В данных методических указаниях вы найдете изложение теоретического материала, справочный материал, примеры решения задач, задания для самостоятельных занятий, для подготовки к контрольным работам, зачету, экзамену.

Методические указания не являются учебником, поэтому не все изучаемые понятия рассмотрены одинаково подробно. По этой причине в некоторых случаях необходимо приложить для освоения материала больше усилий, чем в других. В данном пособии рассматриваются элементы математики, относящиеся к периоду математики переменных величин и современному периоду, имеющие большое значение в современной фундаментальной и прикладной математике.

Работая над каждой темой, лучше всего сначала изучить теоретический материал, повторить ранее изученные формулы, теоремы, разобраться в приведенных примерах. Если все понятно, то можно переходить к выполнению практических заданий.

Целью практических занятий является формирование учебных практических умений по математике и содействие оптимальному освоению студентами учебного материала. Выполнение студентами практических работ направлено на обобщение, систематизацию, углубление, закрепление полученных знаний по конкретным темам, формирование умений применять полученные знания на практике, формирование профессионально значимых качеств таких, как самостоятельность, ответственность, точность.

Учебные и воспитательные цели практических занятий

В рамках традиционного подхода:

1) актуализировать знания студентов из курса математики по теме занятия;

2) создать условия для развития творческой активности, самостоятельности и критичности мышления, умения работать в коллективе.

В рамках компетентностного подхода:

1) содействовать развитию у студентов общенаучных компетенций (аналитико-синтетической, прогностической, проектировочной);

2) создать условия для развития коммуникативной, адаптивной и информационной компетенций.

Данные указания предназначены для использования в средних профессиональных учебных заведениях, в учебных планах которых предусмотрена дисциплина «Математика», соответствующая действующим программам. Представленные в указаниях основные математические структуры имеют настолько большую общеобразовательную и математическую значимость, что являются обязательными для рассмотрения студентами всех специальностей.

При выполнении практической работы студентам рекомендуется:

- использовать учебные пособия, справочники;
- проводить несложные дедуктивные рассуждения;
- обосновывать шаги решения задач;
- формулировать определения математических понятий;
- пользоваться математической терминологией и символикой;
- письменно оформлять решения задач;
- пользоваться калькулятором;
- самостоятельно изучать учебный материал.

Все представленные варианты практических работ даны одинаковой степени трудности.

Тематический план практических занятий учебной дисциплины «Математика»

Наименование тем	Практические работы
Тема 1.1 Рациональные и иррациональные числа	Практическая работа №1 «Действительные числа. Приближенные вычисления»
Тема 1.2 Комплексные числа	Практическая работа №2 «Действия над комплексными числами»
Тема 2.1 Корни и степени	Практическая работа №3 «Степени с действительными показателями, их свойства»
	Практическая работа №4 «Действия со степенями»
Тема 2.2 Логарифмы	Практическая работа №5 «Преобразование логарифмических выражений»
Тема 2.3 Преобразование выражений	Практическая работа №6 «Преобразование выражений»
Тема 3.1 Основные тригонометрические тождества	Практическая работа №7 «Преобразование тригонометрических выражений с использованием тригонометрических тождеств»
Тема 3.2 Тригонометрические уравнения и неравенства	Практическая работа №8 «Решение тригонометрических уравнений»
	Практическая работа №9 «Решение тригонометрических неравенств»
Тема 4.1 Функции, их свойства	Практическая работа №10 «Построение графиков элементарных функций»
	Практическая работа №11 «Промежутки возрастания, убывания, наибольшее, наименьшее значения функции. Точки экстремума»
Тема 4.2 Определения функций	Практическая работа №12 «Степенная функция, её график и свойства»
	Практическая работа №13 «Логарифмическая функция, её график и свойства»
Тема 5.1 Пределы	Практическая работа №14 «Вычисление пределов функции в точке, не бесконечности»
Тема 5.2 Понятие	Практическая работа №15 «Правила вычисления производных»

производной	
Тема 5.3 Производная сложной функции	Практическая работа №16 «Вычисление производных сложной функции»
Тема 6.1 Неопределенный интеграл	Практическая работа №17 «Вычисление неопределенных интегралов методом замены переменной»
	Практическая работа №18 «Вычисление неопределенных интегралов методом интегрирования по частям»
Тема 6.2 Определенный интеграл	Практическая работа №19 «Вычисление определенных интегралов различными способами»
	Практическая работа №20 «Приложения определенных интегралов»
Тема 7.1 Уравнения	Практическая работа №21 «Решение уравнений: разложение на множители, введение новых переменных, подстановка»
Тема 7.2 Неравенства	Практическая работа №22 «Решение неравенств методом интервалов»
Тема 8.1 Элементы комбинаторики	Практическая работа №23 «Решение задач на перебор вариантов»
Тема 9.1 Элементы теории и вероятностей	Практическая работа №24 «Сложение и умножение вероятностей»
Тема 10.1 Параллельность в пространстве	Практическая работа №25 «Параллельность прямой и плоскости»
Тема 11.1 Многогранники	Практическая работа №26 «Изображения пространственных фигур»
	Практическая работа №27 «Вершины, ребра, грани многогранника»
	Практическая работа №28 «Параллелепипед. Куб»
Тема 11.2 Тела и поверхности вращения	Практическая работа №29 «Сечения куба, призмы, пирамиды»
	Практическая работа №30 «Представление о правильных многогранниках (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр)»
	Практическая работа №31 «Шар и сфера, их сечения»

Практическое занятие № 1

Действительные числа. Приближенные вычисления

Цель работы:

студент должен:

знать:

- формулы для вычисления границ абсолютной и относительной погрешности суммы, разности, произведения и частного приближенных значений чисел;

уметь:

- вычислять сумму, разность, произведение и частное приближенных значений чисел.

Сведения из теории:

Сложение приближенных значений чисел

Граница абсолютной погрешности суммы приближенных значений чисел равна сумме границ абсолютных погрешностей этих чисел:

$$\Delta(a+b)=\Delta a+\Delta b,$$

где a и b – приближенные значения чисел; Δa и Δb – границы абсолютных погрешностей соответствующих приближений.

Граница относительной погрешности сумы вычисляется по формуле:

$$\varepsilon_{a+b}=\frac{\Delta(a+b)}{a+b}.$$

Пример 1.

Найти сумму S приближенных значений чисел 6,8±0,05; 4,3±0,05 и 3,575±0,0005.

Решение:

вычислим сумму заданных чисел и сумму их погрешностей:

$$S=6{,}8+4{,}3+3{,}575=14{,}675;$$

$$\Delta S=0{,}05+0{,}05+0{,}0005=0{,}1005.$$

Граница абсолютной погрешности заключена в пределах $0{,}05<0{,}1005<0{,}5$. В приближенном значении суммы верными являются лишь две цифры (в разрядах десятков и единиц). Полученный результат округлим до единиц $S=14{,}675\approx 15$.

Вычитание приближенных значений чисел

Граница абсолютной погрешности разности двух приближенных значений чисел равна сумме границ их абсолютных погрешностей:

$$\Delta(a-b)=\Delta a+\Delta b.$$

Граница относительной погрешности разности вычисляется по формуле:

$$\varepsilon_{a-b}=\frac{\Delta a+\Delta b}{a-b}.$$

Таблица 1. Формулы для границ абсолютной и относительной погрешностей.

№ п/п	Функция	Граница абсолютной погрешности	Граница относительной погрешности
1	$y=ab$	$\Delta y=\lvert b\rvert\cdot\Delta a+\lvert a\rvert\cdot\Delta b$	$\varepsilon_y=\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}$
2	$y=abc$	$\Delta y=\lvert bc\rvert\cdot\Delta a+\lvert ac\rvert\cdot\Delta b+\lvert ab\rvert\cdot\Delta c$	$\varepsilon_y=\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}+\frac{\Delta c}{c}$
3	$y=a^n$	$\Delta y=n\,a^{n-1}\cdot\Delta a$	$\varepsilon_y=n\frac{\Delta a}{a}$

4	$y=a^2$	$\Delta y=2a\cdot\Delta a$	$\varepsilon_y=2\dfrac{\Delta a}{a}$
5	$y=a^3$	$\Delta y=3a^2\cdot\Delta a$	$\varepsilon_y=3\dfrac{\Delta a}{a}$
6	$y=\sqrt{a}$	$\Delta y=\dfrac{\Delta a}{2\sqrt{a}}$	$\varepsilon_y=\dfrac{\Delta a}{2a}$
7	$y=\sqrt[3]{a}$	$\Delta y=\dfrac{\Delta a}{3\sqrt[3]{a^2}}$	$\varepsilon_y=\dfrac{\Delta a}{3a}$
8	$y=\dfrac{a}{b}$	$\Delta y=\dfrac{\lvert b\rvert\cdot\Delta a+\lvert a\rvert\cdot\Delta b}{b^2}$	$\varepsilon_y=\dfrac{\Delta a}{a}+\dfrac{\Delta b}{b}$

Задания для самостоятельного решения:

Вычислите сумму, разность, произведение и частное приближенных значений чисел:

1 вариант	**2 вариант**	**3 вариант**
$\sqrt{13}.\sqrt{5}$ с четырьмя значащими цифрами.	0,456±0,0005 и 3,35±0,005.	$\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{7}$ с четырьмя значащими цифрами.

Контрольные вопросы:

1. Перечислите действия над приближенными значениями чисел.
2. Перечислите формулы для вычисления границ абсолютной и относительной погрешностей некоторых функций.

Литература: [4, с. 14-18]

Практическое занятие № 2
Действия над комплексными числами

Цель работы:
студент должен:
знать:
- алгебраическую форму комплексного числа;
- тригонометрическую форму комплексного числа;

уметь:
- выполнять действия над комплексными числами, представленными в различных формах.

Сведения из теории:
Алгебраическая форма комплексного числа

Обозначим $\sqrt{-1}=i$ и назовём мнимой единицей, ($i^2=-1$). Тогда число вида $z=a+bi,$ где a и b - любые действительные числа, назовём комплексным числом.

Здесь a - называют действительной частью комплексного числа, bi - называют мнимой частью, b - коэффициентом мнимой части комплексного числа.

Действия над комплексными числами, представленными в алгебраической форме

Пусть даны два числа $z_1=a_1+b_1i,$ и $z_2=a_2+b_2i$.

Для этих чисел понятия равенство и действия сложения, умножения определены следующим образом:

1) Два комплексных числа называются равными, если равны их действительная и мнимая части, т. е. $a_1=a_2$, $b_1=b_2$.

2) Суммой двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число $z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$.

3) Произведением двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число $z_1z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$.

4) Модулем комплексного числа называется длина вектора соответствующего этому комплексному числу на плоскости и вычисляется по формуле: $|\vec{z}|=r=\sqrt{a^2+b^2}$.

5) Аргументом комплексного числа называется угол, образованный вектором с положительным направлением действительной оси и вычисляется по формуле: $\arg z=\arg(a+bi)=\varphi+2\pi k$. Т. о. для каждого комплексного числа можно указать бесконечное множество аргументов.

Для нахождения аргумента необходимо:

1. Определить в какой координатной четверти находится комплексное число.
2. Найти в этой четверти угол решив уравнение:

$$tg\varphi=\frac{b}{a};\ \ \varphi=arctg\frac{b}{a}=\varphi+\pi k,\ \ k\in Z.$$

Пример 3.

Решите квадратное уравнение: $x^2-6x+13=0$.

Решение:

вычислим корни квадратного уравнения через дискриминант:

$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-4\cdot13}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{36-52}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{16\cdot(-1)}}{2}=\frac{6\pm4i}{2}.$$

$$x_1=\frac{6\pm4i}{2}=\frac{2(3+2i)}{2}=3+2i;\ \ x_2=3-2i.$$

Получена пара взаимно - сопряжённых комплексных чисел $3\pm2i$, где $a=3; b=2.$

Заметим, что всякое алгебраическое уравнение степени n имеет ровно n корней, среди которых могут быть как действительные (различные или равные), так и комплексные (обязательно попарно взаимно – сопряжённые) корни.

Тригонометрическая форма комплексного числа

Запись комплексного числа в виде $a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ называется тригонометрической формой комплексного числа.

Действия над комплексными числами, представленными в тригонометрической форме

Над комплексными числами в тригонометрической форме выполняются действия умножения, деления, возведения в степень и извлечение корня n-ой степени.

Пусть даны два числа $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ и $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$, тогда:

1) Произведением комплексных чисел называется комплексное число, которое вычисляется по формуле: $z_1z_2=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$.

2) Частным комплексных чисел называется комплексное число, которое вычисляется по формуле: $\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$.

3) Для возведения в степень: $z^n=r^n(\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi))$.

Пример 8.

Упростите: $\frac{1+2i^5}{1+3i^{21}}$.

Решение:

упростим дробь (понизим степень числителя и знаменателя), используя ($i^2=-1$):

$$i^5=i^4i^1=(i^2)^2i=(-1)^2i=i;$$
$$i^{21}=i^{20}i^1=(i^2)^{10}i=(-1)^{10}i=i.$$

Подставим полученные выражения в исходную дробь и преобразуем её:

$$\frac{1+2i^5}{1+3i^{21}}=\frac{1+2i}{1+3i}=\frac{(1+2i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\frac{1-3i+2i-6i^2}{1+9}=\frac{1-i+6}{10}=\frac{7-i}{10}=\frac{7}{10}-\frac{i}{10}.$$

Задания для самостоятельного решения:

1 вариант	**2 вариант**
№1. Выполните действия, вычислите аргумент и модуль комплексного числа: 1) $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2$; 2) $4+(1+i)^3-(1-i)^3$; 3) $\frac{(2+3i)^2}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$. №2. Решите уравнение: x^2-6x+13=0.	№1. Выполните действия, вычислите аргумент и модуль комплексного числа: 1) $\frac{1+2i^{15}}{1+3i^{21}}$; 2) $(1-i)^{10}$; 3) $\frac{4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{1-i^2}$. №2. Решите уравнение: x^2+3x+4=0.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение алгебраической форме комплексного числа.
2. Перечислите действия над комплексными числами, представленными в алгебраической форме.
3. Дайте определение тригонометрической форме комплексного числа.
4. Перечислите действия над комплексными числами, представленными в тригонометрической форме.

Литература: [2, §1-5, с. 15-76]

Практическое занятие № 3
Степени с действительными показателями, их свойства

Цель работы:

студент должен:

знать:

- основные показательные тождества;
- свойства степеней с действительными показателями;

уметь:

- вычислять степени с действительными показателями.

Сведения из теории:

Повторим определения *понятия степени* с натуральным, нулевым, целым отрицательным и рациональным показателями:

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ раз}};\ a^{-n}=1/(a^n);\ a^0=1,\ a\neq 0;\ a^{m/n}=\sqrt[n]{a^m},$$

$$m\in\mathbf{Z},\ n\in\mathbf{N},\ n\geq 2.$$

Повторим свойства степеней с рациональным показателем:
при любых x и y справедливы равенства:

$$a^xa^y=a^{x+y};$$
$$a^x/a^y=a^{x-y};$$
$$(a^x)^y=a^{xy};$$
$$(ab)^x=a^xb^x;$$
$$(a/b)^x=a^x/b^x.$$

Степень с действительным показателем

Свойства степеней с действительным показателем:

1. $a^{x/y}=a^{(xk)/(yk)}$, $a>0$, y, $k\in\mathbf{N}$, $x\in\mathbf{Z}$.
2. $a^x>0$, $a>0$, $x\in\mathbf{R}$ (любая степень положительного числа положительна).
3. $a^x>1$ при $a>1$, $x>0$.
4. $a^x<1$ при $a>1$, $x<0$.
5. $1^x=1$ (любая степень единицы равна единице).
6. $a^x<1$ при $0<a<1$, $x>0$.
7. $a^x>1$ при $0<a<1$, $x<0$.
8. Если $a>1$, $a\neq 1$, то для любого положительного числа b существует единственное действительное число x такое, что $a^x=b$ при $b>0$.
9. Любая положительная степень нуля равна нулю.

Кроме перечисленных свойств важно отметить три свойства, на которых основано решение простейших показательных уравнении и неравенств:

10. Если $a^x=a^y$, то $x=y$ при $a>0$, x, $y\neq 1$.
11. Если $a^x<a^y$, то $x<y$ при $a>0$.
12. Если $a^x<a^y$, то $x>y$ при $0<a<1$.

Правила действия над степенями с действительным показателем выражаются формулами (тождествами):

13. $a^\alpha a^\beta=a^{\alpha+\beta}$.
14. $a^\alpha:a^\beta=a^{\alpha-\beta}$.
15. $(a^\alpha)^\beta=a^{\alpha\beta}$.
16. $(ab)^\alpha=a^\alpha b^\alpha$ при $a>0$, $b>0$.
17. $|ab|^\alpha=|a|^\alpha|b|^\alpha$ при $ab>0$.
18. $(a/b)^\alpha=a^\alpha/b^\alpha$ при $a>0$, $b>0$.
19. $|a/b|^\alpha=|a|^\alpha/|b|^\alpha$ при $ab>0$.

Формулы, обратные формулам 1-7, так же верны.

Пример 11.

Вычислите: $\dfrac{7^{-1}\cdot\left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}-64^{-\frac{1}{2}}\cdot 3^{-2}}{5^{-1}-\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}}$.

Решение:
упростим заданное выражение, использую свойства степеней:

$$\frac{7^{-1}\cdot\left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}-64^{-\frac{1}{2}}\cdot 3^{-2}}{5^{-1}-\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}}=\frac{\frac{1}{7}\cdot 49^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2}}{\frac{1}{5}-9^{\frac{1}{2}}}=\frac{\frac{1}{7}\sqrt{49}-\sqrt{\frac{1}{64}}\cdot\frac{1}{9}}{\frac{1}{5}-\sqrt{9}}=\frac{\frac{1}{7}\cdot 7-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{9}}{\frac{1}{5}-3}=$$

$$=\frac{1-\frac{1}{72}}{-2\frac{4}{5}}=\frac{\frac{72}{72}-\frac{1}{72}}{-\frac{14}{5}}=\frac{\frac{71}{72}}{\left(-\frac{14}{5}\right)}=\frac{71}{72}\cdot\left(-\frac{5}{14}\right)=-\frac{355}{1008}.$$

Задания для самостоятельного решения:

1 вариант	**2 вариант**	**3 вариант**
№1. Вычислите: 1) $2\cdot 2^{-3}$; 2) $\dfrac{\left(3^{-2}\right)^{3}\cdot 27^{2}}{3}$. №2. Упростите: $b^{\frac{1}{3}}\cdot b^{-\frac{1}{6}}$.	№1. Вычислите: 1) $5^{-2}\cdot 5$; 2) $\dfrac{\left(2^{-2}\right)^{4}\cdot 16^{2}}{2^{3}}$. №2. Упростите: $a^{-\frac{1}{2}}a^{\frac{3}{4}}$.	№1. Вычислите: 1) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$; 2) $3\sqrt[3]{-27}+0{,}1\sqrt[4]{81}-\sqrt{1}$. №2. Упростите: $x^{-\frac{3}{4}}x^{\frac{1}{2}}$.

Контрольные вопросы:

1. Перечислите основные показательные тождества.
2. Перечислите свойства степеней с действительными показателями.

Литература: [15, с. 186-188]

Практическое занятие № 4
Действия со степенями

Цель работы:

студент должен:

знать:

- основные показательные тождества;
- свойства степеней с действительными показателями;

уметь:

- вычислять степени с действительными показателями.

Сведения из теории:

Свойства степеней с действительным показателем:

1. $a^{x/y}=a^{(xk)/(yk)}$, $a>0$, y, $k\in\boldsymbol{N}$, $x\in\boldsymbol{Z}$.
2. $a^{x}>0$, $a>0$, $x\in\boldsymbol{R}$ (любая степень положительного числа положительна).
3. $a^{x}>1$ при $a>1$, $x>0$.
4. $a^{x}<1$ при $a>1$, $x<0$.
5. $1^{x}=1$ (любая степень единицы равна единице).
6. $a^{x}<1$ при $0<a<1$, $x>0$.

7. $a^x>1$ при $0<a<1$, $x<0$.

8. Если $a>1$, $a\neq1$, то для любого положительного числа b существует единственное действительное число x такое, что $a^x=b$ при $b>0$.

9. Любая положительная степень нуля равна нулю.

Так же при упрощении выражений, содержащих степени пользуются формулами: $a^0=1$, $a\neq0$; $a^{m/n}=\sqrt[n]{a^m}$, $m\in\mathbf{Z}$, $n\in\mathbf{N}$, $n\geq2$.

Пример 13.

Решить уравнение: $x^5=11$.

Решение:

т.к. степень уравнения 5 – нечетное число, то уравнение имеет один корень: $x=\sqrt[5]{11}$.

Задания для самостоятельного решения:

1 вариант	2 вариант	3 вариант
1) Вычислите: $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}+\sqrt[4]{\frac{16}{625}}-\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$. 2) Решить уравнение: $x^3=11$. 3) Упростите: $\frac{\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{b}}+2\sqrt{\sqrt{a}}$.	1) Вычислите: $\frac{1}{2}\sqrt[3]{-27}+5\sqrt[4]{0{,}0081}+3\sqrt[8]{1}$. 2) Решить уравнение: $x^8+24=0$. 3) Упростите: $\sqrt[4]{3+\sqrt{5}}\times\sqrt[4]{3-\sqrt{5}}$.	1) Вычислите: $2{,}5\sqrt[6]{64}+10\sqrt[3]{-0{,}125}+8\sqrt[10]{1}$. 2) Решить уравнение: $x^4=16$. 3) Упростите: $\frac{3a^{\frac{1}{2}}-a}{3-a^{\frac{1}{2}}}$.

Контрольные вопросы:

1. Перечислите основные показательные тождества.
2. Перечислите свойства степеней с действительными показателями.

Литература: [15, с. 186-188]

Практическое занятие № 5
Преобразование логарифмических выражений

Цель работы:

студент должен:

знать:

- определение логарифма числа;
- формулы основного логарифмического тождества, логарифма произведения, частного, степени, перехода от одной системы логарифмов к другой;

уметь:

- вычислять значения несложных логарифмических выражений.

Сведения из теории:

Логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени (x), в которую нужно возвести основание a, чтобы получить число b, т.е. $log_ab=x \rightarrow a^x=b$.

При работе с логарифмами применяются следующие их свойств, вытекающие из свойств показательной функции:

1. $a^{logab}=b$ (где $b>0$, $a>0$ и $a\neq0$) называют *основным логарифмическим тождеством*.

При любом $a>0$ ($a\neq0$) и любых положительных x и y выполняются равенства:

2. $log_a1=0$.

3. $log_aa=1$.

4. Логарифм произведения равен сумме логарифмов: $log_axy=log_ax+log_ay$.

5. Логарифм частного равен разности логарифмов: $log_a(x/y)=log_ax-log_ay$.

6. Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания этой степени: $log_a x^k = k log_a x$.

Основные свойства логарифмов широко применяются в ходе преобразования выражений, содержащих логарифмы. Среди них формула перехода к новому основанию: $log_a x = log_b x / log_b a$. Эта формула верна, если обе ее части имеют смысл, т.е. при $x>0$, $a>0$ и $a\neq 0$, $b>0$ и $b\neq 1$).

По правилу логарифмирования степени и основному логарифмическому тождеству получаем:

$log_b x = log_b(a^{log a x})$, откуда $log_b x = log_a x \cdot log_b a$. Эту формулу так же можно использовать для упрощения выражений.

Пример 18.

Вычислите, используя определение логарифма числа $\log_{13}\sqrt[5]{169}+\log_{11}\sqrt[3]{121}$.

Решение:

вычислим отдельно каждый логарифм:

$$\log_{13}\sqrt[5]{169}=x, \qquad \log_{11}\sqrt[3]{121}=x,$$

$$13^x=\sqrt[5]{169}, \qquad 11^x=\sqrt[3]{121},$$

$$13^x=\sqrt[5]{13^2}, \qquad 11^x=\sqrt[3]{11^2},$$

$$13^x=13^{\frac{2}{5}}, \qquad 11^x=11^{\frac{2}{3}},$$

$$x=\frac{2}{5}. \qquad x=\frac{2}{3}.$$

Вернемся в пример: $\log_{13}\sqrt[5]{169}+\log_{11}\sqrt[3]{121}=\frac{2}{5}+\frac{2}{3}=\frac{6+10}{15}=\frac{16}{15}=1\frac{1}{15.}$

Задания для самостоятельного решения:

Вычислите:

1 вариант	**2 вариант**	**3 вариант**
1) $\log_{16}0,5$; 2) $100^{\lg\sqrt{5}}$; 3) $\frac{\lg 4}{\lg 64-\lg 8}$.	1) $\log_{64}(1/16)$; 2) $5^{-6\log_5 2}$; 3) $\frac{\lg 4}{\lg 16-\lg 8}$.	1) $\log_4 8^7$; 2) $36^{0,5-\log_6\sqrt{5}}$; 3) $\frac{\lg 3+\lg 27}{\lg 9}$.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение логарифма числа.
2. Перечислите свойства логарифмов.

Литература: [5, с. 232-235], [15, с. 196-197]

Практическое занятие № 6

Преобразование выражений

Цель работы:

студент должен:

знать:

- правила преобразования рациональных, иррациональных, степенных выражений;

уметь:

- выполнять преобразования рациональных, иррациональных, степенных выражений.

Сведения из теории:

Преобразование алгебраических выражений, используя приведение дробей к общему знаменателю, формулы сокращенного умножения.

Формулы сокращенного умножения:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b);$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3;$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2);$$

где a, b, c – любые действительные числа;

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где $a \neq 0$, x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Основное свойство дроби и действия над дробями

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b} = \frac{a:c}{b:c}, \text{ где } b \neq 0,\ c \neq 0;$$

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c};$$

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{d} = \frac{ad \pm bc}{cd};$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd};$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Пример 27.

Упростите: $\left(\frac{a^3+b^3}{a+b}\right) : (a^2 - b^2) + \frac{2b}{a+b} - \frac{ab}{a^2 - b^2}$.

Решение:

решаем по действиям: 1) деление; 2) сложение; 3) вычитание.

1) Используя формулы сокращенного умножения разности квадратов: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, суммы кубов $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$, получим:

$$\left(\frac{a^3+b^3}{a+b}\right) : (a^2 - b^2) = \frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2)}{a+b} \cdot \frac{1}{(a-b)(a+b)} = \frac{(a^2 - ab + b^2)}{(a-b)(a+b)};$$

2) Для сложения приведем дроби к общему знаменателю $(a-b)(a+b)$:

$$\frac{(a^2-ab+b^2)}{(a-b)(a+b)}+\frac{2b}{a+b}=\frac{a^2-ab+b^2+2b(a-b)}{(a-b)(a+b)}=$$

$$=\frac{a^2-ab+b^2+2ab-2b^2}{(a-b)(a+b)}=\frac{a^2+ab-b^2}{a^2-b^2}.$$

3) Выполним вычитание дробей с одинаковыми знаменателями:

$$\frac{a^2+ab-b^2}{a^2-b^2}-\frac{ab}{a^2-b^2}=\frac{a^2+ab-b^2-ab}{a^2-b^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2-b^2}=1.$$

Преобразование выражений, содержащих радикалы

Чтобы освободиться от иррациональности в знаменателе необходимо и числитель и знаменатель дроби помножить на одно и то же число, сопряженное к знаменателю.

Задания для самостоятельного решения:

1 вариант	**2 вариант**
№1. Упростите: $\left(m+n-\frac{4mn}{m+n}\right):\left(\frac{m}{m+n}-\frac{n}{n-m}-\frac{2mn}{m^2-n^2}\right)$ №2. Освободитесь от иррациональности в знаменателе: $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}$. №3. Решите иррациональное уравнение: $\sqrt{x}=x-6$.	№1. Упростите: $\left(\frac{x}{x^2-4}-\frac{8}{x^2+2x}\right)\cdot\left(\frac{x^2-2x}{4-x}\right)+\frac{x+8}{x+2}$. №2. Освободитесь от иррациональности в знаменателе: $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}$. №3. Решите иррациональное уравнение: $\sqrt{x-5}=\sqrt{3-x}$.

Контрольные вопросы:

1. Какие формулы можно использовать при преобразовании алгебраических выражений?
2. Как можно освободиться от иррациональности в знаменателе?
3. Сформулируйте правила решения иррациональных уравнений.

Литература: [5, с. 281-283]

Практическое занятие № 7

Преобразование тригонометрических выражений с использованием тригонометрических тождеств

Цель работы:

студент должен:

знать:

- формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение;
- формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму;

уметь:

- выполнять преобразования тригонометрических выражений, используя тригонометрические тождества.

Сведения из теории:

Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$tg\alpha+tg\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,$$

$$tg\alpha-tg\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k.$$

Для преобразования произведения тригонометрических функций в сумму применяются формулы:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)),$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)),$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)).$$

Пример 38.

Преобразуйте в алгебраическую сумму $\sin 5x\sin 3x$.

Решение:

по формуле $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$ имеем

$$\sin 5x\sin 3x=\frac{1}{2}(\cos(5x-3x)-\cos(5x+3x))=\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 8x)=\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\cos 8x.$$

Задания для самостоятельного решения:

1 вариант	**2 вариант**	**3 вариант**
1) Упростите: $\frac{2\cos\alpha-\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha-\sin\alpha+\cos^2\alpha}$. 2) Вычислите: $\sin 75^0+\sin 15^0$. 3) Вычислите: $\sin 52^0 30'\cdot\cos 7^0 30'$.	1) Упростите: $\frac{1-\sin\left(2\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}{\sin(\pi-3\alpha)-\sin(-\alpha)}$. 2) Вычислите: $\sin 75^0+\sin 105^0$. 3) Вычислите: $\sin 37^0 30'\cdot\sin 7^0 30'$.	1) Упростите: $\frac{\cos(2\pi-2\alpha)}{ctg^2\alpha-1}-\sin^2\alpha$. 2) Вычислите: $\cos 75^0+\cos 15^0$. 3) Вычислите: $8\cos 7\alpha\cdot\cos 3\alpha$.

Контрольные вопросы:

1. Перечислите основные тригонометрические тождества.
2. Перечислите формулы двойного угла тригонометрических функций.
3. Какие есть формулы для преобразования суммы тригонометрических функций?

Литература: [4, с. 162-164]

Практическое занятие № 8

Решение тригонометрических уравнений

Цель работы:

студент должен:

знать:

- формулы для решения тригонометрических уравнений в общем виде и частные случаи решения;

уметь:

- решать простейшие тригонометрические уравнения.

Сведения из теории:

Решение простейших тригонометрических уравнений

Уравнение $\cos t=a$

Очевидно, что если $|a|>1$, то уравнение $\cos t=a$ не имеет решений, т.к. $|\cos t|\leq 1$ для любого t.

Пусть $|a|\leq 1$. Надо найти все такие числа t, что $\cos t=a$. На отрезке $[0;\pi]$ существует только одно решение уравнения $\cos t=a$ – это число $\arccos a$.

Косинус – четная функция, и, значит на отрезке $[-\pi;\ 0]$ уравнение также имеет единственное решение – это число $-\arccos a$.

Итак, уравнение $\cos t=a$ на отрезке $[-\pi;\ \pi]$ длиной 2π имеет два решения $t=\pm\arccos a$ (совпадающие при $a=1$).

Вследствие периодичности функции косинус все остальные решения отличаются от найденных на $2\pi n$, ($n\in\mathbf{Z}$), т.е. формула корней уравнения $\cos t=a$ имеет вид:

$$t=\pm\arccos a+2\pi n,\ (n\in\mathbf{Z}).$$

Пример 40.

Решите уравнение: $\cos t=1/2$.

Решение:

по формуле $t=\pm\arccos(1/2)+2\pi n$, ($n\in\mathbf{Z}$).

Поскольку $\arccos(1/2)=\pi/3$ приходим к ответу $t=\pm\ \pi/3+2\pi n$, ($n\in\mathbf{Z}$).

Уравнение $\sin t=a$

Очевидно, что если $|a|>1$, то уравнение $\sin t=a$ не имеет решений, т.к. $|\sin t|\leq 1$ для любого t.

При $|a|\leq 1$ на отрезке $[-\pi/2;\ \pi/2]$ уравнение $\sin t=a$ имеет одно решение $t_1=\arcsin a$. На отрезке $[\pi/2;\ 3\pi/2]$ функция синус убывает и принимает все значения от -1 до 1. По теореме о корне уравнение и на этом отрезке имеет одно решение.

Это решение есть число $t_2=\pi-\arcsin a$, т.к. $\sin t_2=\sin(\pi-t_1)=\sin t_1=a$.

Кроме того, поскольку $-\pi/2\leq t_1\leq\pi/2$,

имеем $-\pi/2\leq -t_1\leq\pi/2$

и $\pi-\pi/2\leq\pi-t_1\leq\pi+\pi/2$,

т.е. $\pi/2\leq t_2\leq 3\pi/2$, $t_2\in[\pi/2;\ 3\pi/2]$.

Итак, уравнение $\sin t=a$ на отрезке $[\pi/2;\ 3\pi/2]$ имеет два решения $t_1=\arcsin a$ и $t_2=\pi-\arcsin a$ (совпадающие при $a=1$). Учитывая, что период синуса равен 2π, получаем формулу для решения уравнения $\sin t=a$:

$$t=(-1)^k\arcsin a+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}.$$

Пример 43.

Решите уравнение: $\sin t=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение:

по формуле $t=(-1)^k arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi k$, ($k$ Є **Z**).

Поскольку $arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pi/4$ приходим к ответу $t=(-1)^k\ \pi/4+\pi k$, (k Є **Z**).

Сводная таблица решения простейших тригонометрических уравнений

Уравнение	Решение
$\sin x=a$	$x=(-1)^k \arcsin a+\pi k, k\in Z$
$\cos x=a$	$x=\pm\arccos a+2\pi k, k\in Z$
$tg x=a$	$x=arctg a+\pi k, k\in Z$
$ctg x=a$	$x=arcctg a+\pi k, k\in Z$

Частные случаи решения простейших тригонометрических уравнений

Уравнение	Частные случаи		
	a=-1	a=0	a=1
$\sin x=a$	$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$	$x=\pi k, k\in Z$	$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$
$\cos x=a$	$x=\pi+2\pi k, k\in Z$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$	$x=2\pi k, k\in Z$
$tg x=a$	$x=-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$	$x=\pi k, k\in Z$	$x=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$
$ctg x=a$	$x=\frac{3\pi}{4}+\pi k, k\in Z$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$	$x=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$

Задания для самостоятельного решения:

Решите уравнения:

1 вариант	**2 вариант**	**3 вариант**
1) $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0$;	1) $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$;	1) $\sin 2x=\frac{1}{2}$;
2) $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$;	2) $\cos 3x=\frac{\sqrt{3}}{2}$;	2) $2\cos x=\sqrt{2}$;
3) $tg 2x=\sqrt{3}$.	3) $tg 2x=-\sqrt{3}$.	3) $tg\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Контрольные вопросы:

1. Перечислите формулы для решения простейших тригонометрических уравнений в общем виде.
2. Перечислите формулы частных случаев решения простейших тригонометрических уравнений.

Литература: [4, с. 181-187], [5, с. 69-74]

Практическое занятие № 9

Решение тригонометрических неравенств

Цель работы:

студент должен:

знать:

- формулы для решения простейших тригонометрических неравенств;

уметь:

- решать простейшие тригонометрические неравенства.

Сведения из теории:

Простейшими тригонометрическими неравенствами называются неравенства $\sin x<m$, $\sin x>m$, $\cos x<m$, $\cos x>m$, $\operatorname{tg} x<m$, $\operatorname{tg} x>m$, $\operatorname{ctg} x<m$, $\operatorname{ctg} x>m$, где m – данное число.

Решить простейшее тригонометрическое неравенство – значит найти множество всех значений аргумента, которые обращают данное неравенство в верное числовое неравенство.

Пример 48.

Решить неравенство: 1) $\sin x>\frac{1}{2}$; 2) $\cos x>-\frac{1}{2}$.

Решение:

1) решение иллюстрируется рисунком 1 слева: здесь точке M_1 соответствует угол $\frac{\pi}{6}$, M_2 – угол $\frac{5\pi}{6}$, M_3 – угол $\frac{\pi}{6}+\pi$, M_4 – угол $\frac{5\pi}{6}+\pi$.

Неравенство выполняется для $\frac{\pi}{6}<x<\frac{5\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{6}+\pi<x<\frac{5\pi}{6}+\pi$. Общим решением служит неравенство:

$$\frac{\pi}{6}+\pi k<x<\frac{5\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}.$$

2) Данное неравенство иллюстрируется рисунком 1 справа: здесь точке M_1 соответствует угол $\frac{2\pi}{3}$, M_2 – угол $-\frac{2\pi}{3}$. Общим решением неравенства является

$$-\frac{2\pi}{3}+2\pi k<x<\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}.$$

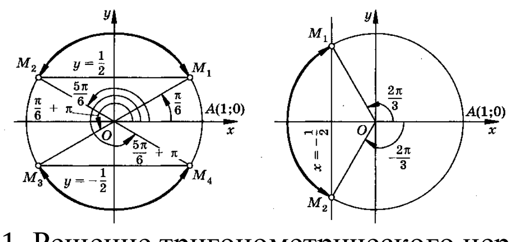


Рисунок 1. Решение тригонометрического неравенства.

Задания для самостоятельного решения:

Решить неравенство:

1 вариант	**2 вариант**	**3 вариант**
1) $\sin(2x)<1$;	1) $2\sin 2x>-1$;	1) $2\sin x<-\sqrt{2}$;
2) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)>-1$;	2) $\cos\left(\frac{x}{2}\right)<-\frac{1}{2}$;	2) $\cos 3x>-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $ctg\frac{x}{2} \le -\sqrt{3}$.	3) $ctg\frac{x}{2} \ge \sqrt{3}$.	3) $3tg\left(3x+\frac{\pi}{6}\right) \ge -\sqrt{3}$.

Контрольные вопросы:

1. Что называется простейшими тригонометрическими неравенствами?
2. Проиллюстрируйте решение неравенства sin $x>m$ на окружности.

Литература: [4, с. 192-193], [5, с. 75-80].

Практическое занятие № 10

Построение графиков элементарных функций

Цель работы:

студент должен:

знать:

- элементарные функции, что является их графиками;

уметь:

- строить графики элементарных функций.

Сведения из теории:

Числовая функция

Числовой функцией с областью определения *D* называется соответствие, при котором каждому числу *x* из множества *D* сопоставляется по некоторому правилу число *y*, зависящее от *x*.

Функции обычно обозначают латинскими буквами. Рассмотрим произвольную функцию *f*. Независимую переменную *x* называют аргументом функции. Число *y*, соответствующее числу *x*, называют значением функции *f* в точке *x* и обозначают *f(x)*. Область определения функции *f* обозначают *D*(*f*). Множество, состоящее из всех чисел *f(x)*, таких, что *x* принадлежит области определения функции *f*, называют областью значений функции и обозначают E(*f*).

Графиком функции *f* называют множество всех точек ($x; y$) координатной плоскости, где $y=f(x)$, а *x* «пробегает» всю область определения функции *f*.

График линейной функции

Линейная функция задается уравнением $y=ax+b$. Графиком линейной функций является прямая. Чтобы построить прямую достаточно две точки.

Пример 49.

Построить график функции $y=2x+1$.

Решение:

найдем две точки. В качестве одной из точек выгодно выбрать нуль. Если $x=0$, то $y=2\cdot 0+1=1$.

Берем еще какую-нибудь точку, например, 1. Если $x=1$, то $y=2\cdot 1+1=3$.

При оформлении заданий координаты точек обычно сводятся в таблицу:

x	0	1
y	1	3

Две точки найдены, выполним чертеж:

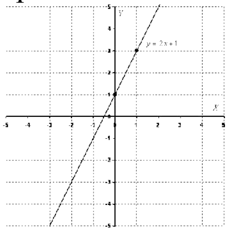


Рисунок 2. График функции $y=2x+1$

При оформлении чертежа всегда подписываем графики.

Частные случаи линейной функции

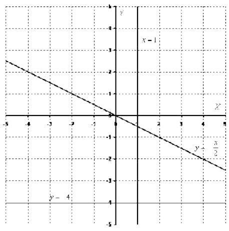


Рисунок 3. Частные случаи графика линейной функции

1) Линейная функция вида $y=ax$ ($a\neq 0$) называется прямой пропорциональностью. Например, $y=-\frac{x}{2}$. График прямой пропорциональности всегда проходит через начало координат. Таким образом, построение прямой упрощается – достаточно найти всего одну точку.

2) Уравнение вида $y=b$ задает прямую, параллельную оси Оx, в частности, сама ось Оx задается уравнением $y=0$.

3) Уравнение вида $x=b$ задает прямую, параллельную оси Оy, в частности, сама ось Оy задается уравнением $x=0$.

График квадратичной, кубической функции

Парабола. График квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$) представляет собой параболу. Рассмотрим канонический случай: $y=x^2$. Область определения – любое действительное число. Функция $y=x^2$ является чётной. Если функция является чётной, то ее график симметричен относительно оси Оy.

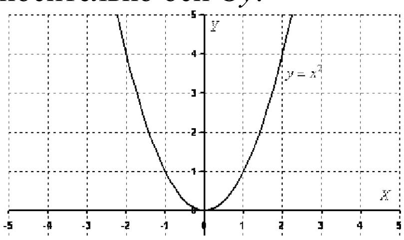


Рисунок 4. График функции $y=x^2$

Пример 50.

Построить график функции $y=-x^2+2x$.

Решение:

сначала находим вершину параболы: $x_в=-\frac{b}{2a}$, $x_в=-\frac{2}{-2}=1$. Рассчитываем соответствующее значение «игрек»: $y=-1^2+2\cdot 1=-1+2=1$. Таким образом, вершина находится в точке (1; 1).

Теперь находим другие точки, при этом пользуемся симметричностью параболы.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-8	-3	0	1	0	-3	-8

Выполним чертеж:

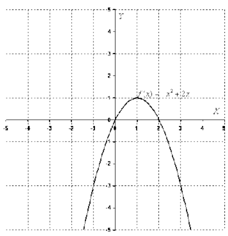


Рисунок 5. График функции $y=-x^2+2x$

Для квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$) справедливо следующее: Если $a>0$, то ветви параболы направлены вверх. Если $a<0$, то ветви параболы направлены вниз.

Кубическая парабола

Кубическая парабола задается функцией $y=x^3$. Область определения, область значений – любое действительное число. Функция является нечётной. График строим по точкам:

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-1	0	1	8

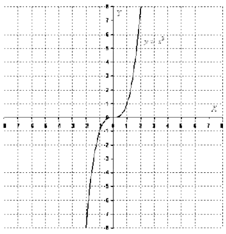


Рисунок 6. График функции $y=x^3$

График функции $y=\sqrt{x}$.

Область определения: $D(y)$: [0; +∞). Область значений: $E(y)$: [0; +∞). То есть, график функции полностью находится в первой координатной четверти. При построении подбираем такие значения «икс», чтобы корень извлекался нацело:

x	0	1	4	9
y	0	1	2	3

Строим график:

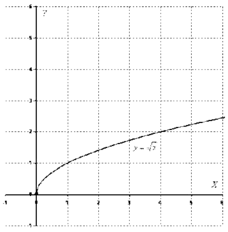


Рисунок 7. График функции $y=\sqrt{x}$

Гипербола

Общий вид $y=\dfrac{1}{x}$. Область определения: $D(y)$: (-∞; 0) и (0; +∞). Область значений: $E(y)$: (-∞; 0) и (0; +∞). Функция является нечётной, гипербола симметрична относительно начала координат.

Выполним чертеж:

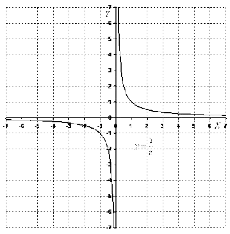


Рисунок 8. График функции $y=\dfrac{1}{x}$

График функции вида $y = \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$) представляют собой две ветви гиперболы.

Если $a>0$, то гипербола расположена в первой и третьей координатных четвертях. Если $a<0$, то гипербола расположена во второй и четвертой координатных четвертях.

Пример 51.

Построить правую ветвь гиперболы $y = \frac{6}{x}$.

Решение:

значения x выгодно подбираем так, чтобы делилось нацело:

x	1	2	3	6
y	6	3	2	1

Выполним чертеж:

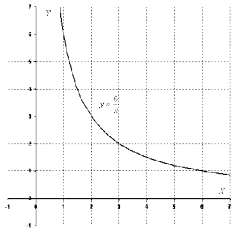


Рисунок 9. График функции $y = \frac{6}{x}$

Задания для самостоятельного решения:

Построить графики функций:

1 вариант	**2 вариант**	**3 вариант**
1) $y=x^2+2x+3$;	1) $y=x^2-4x$;	1) $y=-x^2+2x-1$;
2) $y = 2\sqrt{x}$;	2) $y = \sqrt{2x}$;	2) $y = -\sqrt{x}$;
3) $y = -\frac{6}{x}$.	3) $y = \frac{4}{x}$.	3) $y = \frac{3}{2x}$.

Контрольные вопросы:

1. Что называется функцией?
2. Что является графиком линейной, квадратичной функций?

Литература: [5, с. 319-322]

Практическое занятие № 11

Промежутки возрастания, убывания, наибольшее, наименьшее значения функции. Точки экстремума

Цель работы:

студент должен:

знать:

- определения возрастающей (убывающей) функции;
- определения точки максимума (минимума) функции;

уметь:

- находить промежутки монотонности функции;
- вычислять точки экстремума функции.

Сведения из теории:

Возрастание и убывание функций

Функция f возрастает на множестве P, если для любых x_1 и x_2 из множества P, таких, что $x_2>x_1$, выполнено неравенство $f(x_2)>f(x_1)$.

Функция f убывает на множестве P, если для любых x_1 и x_2 из множества P, таких, что $x_2>x_1$, выполнено неравенство $f(x_2)<f(x_1)$.

Иными словами, функция f называется возрастающей на множестве P, если большему значению аргумента из этого множества соответствует большее значение функции. Функция f называется убывающей на множестве P, если большему значению аргумента из этого множества соответствует меньшее значение функции.

Пример 52.

Докажите, что функция $f(x)=1/x$ является убывающей.

Решение:

область определения функции: $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. Рассмотрим поведение функции на каждом интервале:

$(-\infty; 0)$: $x_1=-8$, $x_2=-4$, т.е. $x_2>x_1$, тогда $f(-8)=-0{,}125$, $f(-4)=-0{,}25$, т.е $f(x_2)<f(x_1)$, а значит функция $f(x)=1/x$ является убывающей на интервале $(-\infty; 0)$.

$(0; +\infty)$: $x_1=4$, $x_2=8$, т.е. $x_2>x_1$, тогда $f(4)=0,\ 25$, $f(8)=0{,}125$, т.е. т.е $f(x_2)<f(x_1)$, а значит функция $f(x)=1/x$ является убывающей на интервале $(0; +\infty)$.

Однако эта функция не является убывающей на объединении этих промежутков. Например, $1>-1$, но $f(1)<f(-1)$.

При исследовании функций на возрастание и убывание принято указывать промежутки возрастания и убывания максимальной длины, включая концы (если, конечно, они входят в эти промежутки). Так, можно было сказать, что функция $f(x)=1/x$ является убывающей на отрезке [2; 500]. Это верно, но такой ответ неполон.

При исследовании поведения функции вблизи некоторой точки удобно пользоваться понятием окрестности.

Окрестностью точки a называется любой интервал, содержащий эту точку. Например, интервал (2; 6) – одна из окрестностей точки 3, интервал (-3,3; -2,7) – окрестность точки -3.

Экстремумы

Точка x_0 называется *точкой минимума* функции f, если для всех x из некоторой окрестности x_0 выполнено неравенство $f(x)\geq f(x_0)$.

Точка x_0 называется *точкой максимума* функции f, если для всех x из некоторой окрестности x_0 выполнено неравенство $f(x)\leq f(x_0)$.

По определениям значение функции f в точке максимума x_0 является наибольшим среди значений функции из некоторой окрестности этой точки, поэтому график функции в окрестности x_0, как правило, имеет вид гладкого «холма» или заостренного «пика». В окрестности точки минимума графики, как правило, изображаются в виде «впадины», тоже или гладкой или заостренной.

Для точек максимума и минимума функции принято общее название – их называют *точками экстремума*.

Значение функции в этих точках называют соответственно максимумами и минимумами функции (общее название – экстремум функции). Точки максимума обозначают x_{max}, а точки минимума x_{min}. Значения функции в этих точках обозначаются соответственно y_{max}, y_{min}.

Задания для самостоятельного решения:

Начертите эскиз графика функции f, определите вид точек, если:

1 вариант	**2 вариант**	**3 вариант**
f возрастает на промежутке $(-\infty;\ 2]$ и убывает на промежутке $[2; +\infty)$.	f возрастает на промежутках $(-\infty; -2]$ и $[0; 3]$, убывает на промежутке	f возрастает на промежутке $[1;\ 4]$ и убывает на промежутках $(-\infty;\ 1]$ и $[4;$

	[2; 0].	$+\infty$).

Контрольные вопросы:

1. Какая функция называется возрастающей (убывающей) на некотором промежутке?
2. Дайте определение точке максимума (минимума) функции.

Литература: [5, с. 42-46]

Практическое занятие № 12

Степенная функция, ее график и свойства

Цель работы:

студент должен:

знать:

- свойства степенной функции с различными показателями степени;

уметь:

- строить график степенной функции с различными показателями степени.

Сведения из теории:

Степенная функция с натуральным показателем

Функция $y=x^n$, где n – натуральное число, называется степенной функцией с натуральным показателем. При $n=1$ получаем функцию $y=x$.

Прямая пропорциональность

Прямой пропорциональностью называется функция, заданная формулой $y=kx^n$, где число k называется коэффициентом пропорциональности.

Перечислим свойства функции $y=kx$:

1. Область определения функции – множество всех действительных чисел.
2. $y=kx$ – нечетная функция, т.к. $f(-x)=k(-x)=-kx=-k(x)=-f(x)$.
3. При $k>0$ функция возрастает, а при $k<0$ убывает на всей числовой прямой.

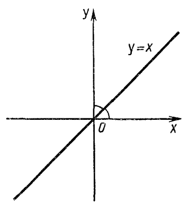


Рисунок 12. График функции $y=kx$

При $n=2$ получаем функцию $y=x^2$. Перечислим свойства функции $y=x^2$:

1. Область определения функции – вся числовая прямая.
2. $y=x^2$ – четная функция, т.к. $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$.
3. На промежутке [0; $+\infty$) функция возрастает. На промежутке (-¥ ; 0] функция убывает.
4. Графиком функции $y=x^2$ является парабола.

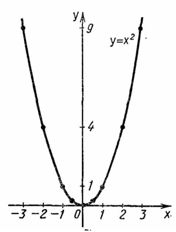


Рисунок 13. График функции $y=x^2$

При $n = 3$ получаем функцию $y=x^3$, ее свойства:

1. Область определения функции – вся числовая прямая.

2. $y=x^3$ – нечетная функция, т.к. $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$.

3. Функция $y=x^3$ возрастает на всей числовой прямой.

4. График функции $y=x^3$ называется кубической параболой.

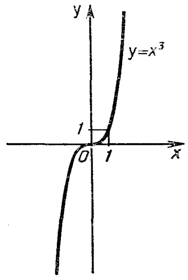


Рисунок 14. График функции $y=x^3$

Пусть n – произвольное четное натуральное число, большее двух: n=4, 6, 8,... .

В этом случае функция $y=x^n$ обладает теми же свойствами, что и функция $y=x^2$. График такой функции напоминает параболу $y=x^2$, только ветви графика при $|n|>1$ круче идут вверх, чем больше n, а при $|n|<1$ «теснее прижимаются» к оси x, чем больше n.

Пусть n – произвольное нечетное число, большее трех: n=5, 7, 9, ...

В этом случае функция $y=x^n$ обладает теми же свойствами, что и функция $y=x^3$. График такой функции напоминает кубическую параболу (только ветви графика тем круче идут вверх, вниз, чем больше n). Отметим также, что на промежутке (0; 1) график степенной функции $y=x^n$ тем медленнее отдаляется от оси Оx с ростом x, чем больше n.

Степенная функция с целым отрицательным показателем.

Рассмотрим функцию $y=x^{-n}$, где n – натуральное число. При n=2 получаем $y=x^{-2}$ или $y=\frac{1}{x^2}$. Свойства этой функции:

1. Функция определена при всех x^{1} 0.

2. $y=\frac{1}{x^2}$ – четная функция.

3. $y=\frac{1}{x^2}$ – убывает на (0; +∞) и возрастает на (-∞; 0).

Теми же свойствами обладают любые функции вида $y=x^{-n}$ при четном n, большем двух.

Функции вида $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt[3]{x}$, $y=\sqrt[n]{x}$ обладают теми же свойствами, как и функция $y=x^n$.

Степенная функция с положительным дробным показателем

Рассмотрим функцию $y=x^r$, где r – положительная несократимая дробь. Перечислим некоторые свойства этой функции:

1. Область определения – луч [0; +∞).

2. Функция ни четная, ни нечетная.

3. Функция $y = x^r$ возрастает на [0; +∞).

Рисунок 15. Графики степенных функций

На рисунке слева изображен график функции $y=x^{\frac{5}{2}}$. Он заключен между графиками функций $y=x^2$ и $y=x^3$, заданных на промежутке [0; +∞).

Подобный вид имеет график любой функции вида $y=x^r$, где $r>1$.

На том же рисунке посередине изображен график функции $y=x^{\frac{2}{3}}$. Подобный вид имеет график любой степенной функции $y=x^r$, где $0<r<1$.

Степенная функция с отрицательным дробным показателем

Рассмотрим функцию $y=x^{-r}$, где r – положительная несократимая дробь. Перечислим свойства этой функции:

1. Область определения – промежуток (0; +∞).
2. Функция ни четная, ни нечетная.
3. Функция $y=x^{-r}$ убывает на (0; +∞).

Пример 57.

Построить график функции $y=x^{-\frac{1}{2}}$.

Решение:

построим таблицу значений данной функции:

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	1	4	9
y	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Нанесем полученные точки на координатную плоскость и соединим их плавной кривой:

исунок 16. График функции $y=x^{-\frac{1}{2}}$

Подобный вид имеет график любой функции $y=x^{-r}$, где r – отрицательная дробь.

Задания для самостоятельного решения:

Постройте график функции и опишите ее свойства:

1 вариант	2 вариант	3 вариант
$y=2\sqrt{x+1}$.	$y=2-\sqrt[4]{x}$.	$y=1+\left\|\sqrt[3]{x}\right\|$.

Контрольные вопросы:

1. Что называется степенной функцией?
2. Перечислите виды степенных функций.
3. Перечислите свойства функции для различных показателей степени.

Литература: [4, с. 106-109]

Практическое занятие № 13

Логарифмическая функция, ее график и свойства

Цель работы:

студент должен:

знать:

- основные свойства логарифмов;

уметь:

- строить график логарифмической функции с разными основаниями.

Сведения из теории:

Пусть a – положительное число, $a\neq1$.

Функцию, заданную формулой $y=log_a x$ называют *логарифмической функцией с основанием a*.

Перечислим основные свойства логарифмической функции:

1. Область определения – множество всех положительных чисел $\boldsymbol{R}_+$, т.е. $D(log_a)=(0; +\infty)$.

2. Область значений – множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$, т.е. $E(log_a)=(-\infty; +\infty)$.

3. Логарифмическая функция на всей области определения возрастает при $a>1$ или убывает при $0<a<1$.

Для построения графика заметим, что значение 0 логарифмическая функция принимает в точке 1; $log_a 1=0$ при любом $a>1$, т.к. $a^0=1$.

Вследствие возрастания функции при $a>1$ получаем, что при $x>1$ логарифмическая функция принимает положительные значения, а при $0<x<1$ – отрицательные.

Если $0<a<1$,то логарифмическая функция убывает на $\boldsymbol{R}_+$, поэтому функция принимает положительные значения при $0<x<1$, а при $x>1$ – отрицательные.

Опираясь на все вышесказанное строим графики логарифмической функции $y=log_a x$ при $a>1$ и при $0<a<1$.

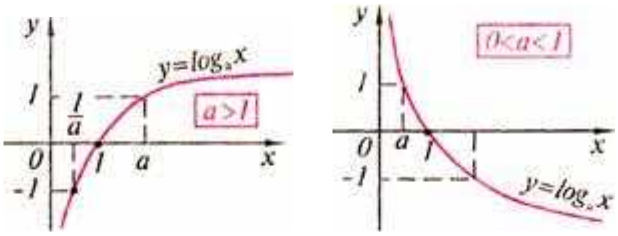


Рисунок 17. График логарифмической функции

Справедливо следующее утверждение: графики показательной и логарифмической функций, имеющих одинаковое основание, симметричны относительно прямой $y=x$.

Пример 58.

Решить графически уравнение $\log_2 x=-x+1$.

Решение:

построим графики функций $y=\log_2 x$ и $y=-x+1$ в одной координатной плоскости:

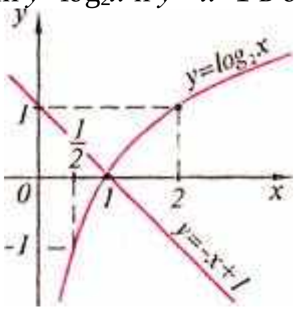


Рисунок 18. Графики функций $y=\log_2 x$ и $y=-x+1$

Графики этих функций пересекаются в точке с абсциссой $x=1$.

Проверка показывает, что $x=1$ – корень данного уравнения.

Задания для самостоятельного решения:

Решите графически уравнение:

Контрольные вопросы:

1. Что называется логарифмической функцией?
2. Перечислите свойства логарифмической функции.

Литература: [4, с. 111-119]

Практическое занятие № 14

Вычисление пределов функции в точке, на бесконечности

Цель работы:

студент должен:

знать:

- определение предела функции;
- свойства и правила вычисления пределов функции;

уметь:

- вычислять пределы функции в точке, на бесконечности.

Сведения из теории:

Предел функции

Число A называют пределом функции $f(x)$ в точке a если при $x \to a$, $f(x) \to A$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0$$

Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

Свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ бесконечно малые при $x \to a$, то $(f(x)+g(x))$ бесконечно малая при $x \to a$.

Если функция $f(x)$ бесконечно малая при $x \to a$ и $g(x)$ – ограниченная, то $(f(x) \cdot g(x))$ – бесконечно малая.

Если существует $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, а $g(x)$ – бесконечно большая при $x \to a$, то $\lim\limits_{x \to a}(f(x) + g(x)) = \infty$; $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Если при $x \to a$, $f(x)$ – бесконечно малая, то $\dfrac{1}{f(x)}$ – бесконечно большая.

Если при $x \to a$, $f(x)$ – бесконечно большая, то $\dfrac{1}{f(x)}$ – бесконечно малая.

Теоремы о пределах

Если существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$, то существует предел суммы (разности) этих функций, который равен сумме (разности) пределов функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$\lim_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x).$$

Если существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$, то существует предел произведения этих функций, который равен произведению пределов этих функций:

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x).$$

Если существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x\to a$ и предел $g(x)\neq 0$, то существует предел частного этих функций, который равен отношению их пределов:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}.$$

Следствие: постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{x\to a}(kf(x))=k\lim_{x\to a}f(x).$$

Пример 65.

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{9x^2+8x-1}{9x-1}$.

Решение:

здесь применима теорема о пределе частного.

Разложим на множители квадратный трехчлен, для этого достаточно найти корни x_1 и x_2 квадратного уравнения $ax^2+bx+c=a(x-x_1)\cdot(x-x_2)$:

$$9x^2+8x-1=9\cdot\left(x-\frac{1}{9}\right)\cdot(x+1).$$

Под знаком предела сократим одинаковые множители и перейдем к пределу:

$$\lim_{x\to 1}\frac{9x^2+8x-1}{9x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{9\left(x-\frac{1}{9}\right)(x+1)}{9x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(9x-1)(x+1)}{9x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=1+1=2.$$

Задания для самостоятельного решения:

Вычислите пределы:

Контрольные вопросы:

1. Что называется пределом функции в точке.
2. Сколько пределов может иметь функция в точке?
3. Сформулируйте теоремы о пределах.

Литература: [8, §18-19, с. 156-185]

Практическое занятие № 15

Правила вычисления производных

Цель работы:

студент должен:

знать:

- системy и определение производной;
- табличные решения производных элементарных функций, в том числе обратных тригонометрических функций;
- правила дифференцирования функций;

уметь:

- находить производную функции;
- находить дифференциал функции;
- дифференцировать элементарные функции.

Сведения из теории:

Табличные значения производных элементарных функций, тригонометрических и обратных тригонометрических функций:

Пример 68.

Вычислите производную функции $f(x) = -2x^2 - \frac{1}{3}x^3 + 5x$.

Решение:

воспользуемся формулами и правилом 1 вычисления производных:

$$f'(x) = \left(-2x^2 - \frac{1}{3}x^3 + 5x\right)' = -2\cdot 2x^{2-1} - \frac{1}{3}\cdot 3x^{3-1} + 5\cdot 1x^{1-1} = -4x - x^2 + 5.$$

Задания для самостоятельного решения:

Вычислите производную функции:

1 вариант	**2 вариант**
1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 5$; 2) $f(x) = (x+1)\sqrt{x}$; 3) $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x}$; 4) $f(x) = \frac{(x^2-1)(x+3)}{15}$.	1) $f(x) = 3x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x$; 2) $f(x) = (x-2)\sqrt{3x}$; 3) $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x^2}$; 4) $f(x) = (x^2+3)(x-4)$.
3 вариант	**4 вариант**
1) $f(x) = 2x^2\sqrt{x} - 4x + 11 + \frac{1}{x}$; 2) $f(x) = (x-2)\sqrt[3]{x}$; 3) $f(x) = \frac{e^x+1}{x}$; 4) $f(x) = \ln x(x+3)$.	1) $f(x) = 3x\sqrt[3]{x} - 2x + 5 + \frac{2}{\sqrt{x}}$; 2) $f(x) = \sqrt{x+1}(x^3-5)$; 3) $f(x) = \frac{9x+1}{\sqrt[3]{x^2}}$; 4) $f(x) = (x^2-1)\sqrt{x+3}$.

Контрольные вопросы:

1. Перечислите значения производных некоторых табличных функций.
2. Сформулируйте правила вычисления производных.

Литература: [8, §29-30, с. 286-297]

Практическое занятие № 16

Вычисление производных сложной функции

Цель работы:

студент должен:

знать:

- систему и определение производной, второй производной и производных высших порядков;
- табличные решения производных элементарных функций, в том числе обратных тригонометрических функций;
- правила вычисления производной сложной функции;

уметь:

- находить производную сложной функции;
- находить вторую производную и производную высших порядков.

Сведения из теории:

Производная сложной функции

Пусть функция $y = f(x)$, $x \in (a;b)$, имеет производную в точке $x_0 \in (a;b)$, а функция $z = f(x)$ имеет производную в точке $y_0 = g(x_0)$. Тогда сложная функция $z(x) = f(g(x))$ имеет производную в точке x_0, которая вычисляется по формуле:

$$z'(x_0) = (f(g(x_0))' = f'(y_0)\cdot g'(x_0).$$

Задания для самостоятельного решения:

Вычислите значение «сложной» производной в указанной точке:

1 вариант	**2 вариант**
1) $f(x)=\sin^2 x;\ \ f'(\pi/4);$	1) $f(x)=\cos^2 x;\ \ f'(-\pi/4);$
2) $f(x)=\ln\cos x;\ \ f'(-\pi/3);$	2) $f(x)=\ln\sin x;\ \ f'(\pi/6);$
3) $f(x)=\sin 2x-\cos^2 x;\ \ f'(0);$	3) $f(x)=\sin^2 x+\cos 2x;\ \ f'(0);$
4) $f(x)=\ln tgx;\ \ f'(\pi/4);$	4) $f(x)=\ln ctgx;\ \ f'(-\pi/4);$
5) $f(x)=e^{\sin x};\ \ f'(0).$	5) $f(x)=e^{\cos 2x};\ f'(\pi/4).$

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте правила вычисления производных сложной функции.
2. Что называется второй производной данной функции?

Литература: [4, с. 236-237], [8, §31, с. 297-301]

Практическое занятие № 17

Вычисление неопределенных интегралов методом замены переменной

Цель работы:

студент должен:

знать:

- таблицу значений неопределенных интегралов;
- суть метода замены переменной в неопределенном интеграле;

уметь:

- вычислять неопределенные интегралы методом замены переменной.

Сведения из теории:

Табличные значения неопределенных интегралов

$\int dx = x + c$	$\int \sin xdx = -\cos x + c$	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + c$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\int \cos xdx = \sin x + c$	$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + c$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + c$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$	
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$	
$\int e^x dx = e^x + c$		

Интегрирование методом замены переменной

Сущность интегрирования методом замены переменной (способом подстановки) заключается в преобразовании интеграла $\int f(x)dx$ в интеграл $\int F(t)dt$, который легко вычисляется по таблице значений неопределенных интегралов.

Для нахождения интеграла $\int f(x)dx$ заменяем переменную x новой переменной t. Дифференцируя равенство, получаем выражение dx.

После того как интеграл относительно новой переменной t будет найден, с помощью обратной подстановки он приводится к переменной x.

Пример 74.

Вычислите интеграл методом замены переменной: $\int \cos(5x+3)dx$.

Решение:

с помощью замены части подынтегрального выражения приведем заданный интеграл к табличному виду:

$$\int \cos(5x+3)dx = \left| \begin{array}{l} t = 5x+3 \\ (5x+3)' dx = dt \\ 5dx = dt \\ dx = \dfrac{dt}{5} \end{array} \right| = \frac{1}{5}\int \cos t dt = \frac{\sin t}{5} + c = \frac{\sin(5x+3)}{5} + c.$$

Задания для самостоятельного решения:

Вычислите следующие интегралы методом замены переменной:

1 вариант	**2 вариант**	**3 вариант**
1) $\int (x^2+3)^5 x dx$; 2) $\int \frac{x}{x^2-1}dx$; 3) $\int \cos^3 x dx$; 4) $\int \frac{\sin 3x dx}{2+\cos 3x}$.	1) $\int 4(x^4-1)^2 x^3 dx$; 2) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; 3) $\int \frac{dx}{(4-3x)^2}$; 4) $\int \sqrt[3]{(3x+1)^2}dx$.	1) $\int \frac{6x^2 dx}{(1-2x^3)^4}$; 2) $\int \frac{x dx}{4x^2+1}$; 3) $\int (7-2x)^3 dx$; 4) $\int \frac{3}{x+5}dx$.

Контрольные вопросы:

1. Какая функция называется первообразной для функции *f(x)*, при $x \in (a; b)$?
2. Что называется неопределенным интегралом?
3. Перечислите основные формулы интегрирования.
4. Сформулируйте суть метода непосредственного интегрирования.

Литература: [4, с. 310, с. 316], [5, с. 219-222].

Практическое занятие № 18

Вычисление неопределенных интегралов методом интегрирования по частям

Цель работы:

студент должен:

знать:

- таблицу значений неопределенных интегралов;
- суть метода интегрирования по частям;

уметь:

- вычислять неопределенные интегралы методом интегрирования по частям.

Сведения из теории:

Интегрирование по частям

Вычисляя дифференциал произведения, имеем:

$$d(uv) = udv + vdu,$$

откуда

$$udv = d(uv) - vdu.$$

Если дифференциалы двух функций равны, то их неопределенные интегралы совпадают. Поэтому

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu$$

и, следовательно,

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

С помощью этой формулы вычисление интеграла $\int udv$ сводится к вычислению интеграла $\int vdu$, если последний окажется проще исходного.

Пример 76.

Вычислите интеграл методом интегрирования по частям: $\int x\sin xdx$.

Решение:

преобразуя части подынтегрального выражения, приведем заданный интеграл к табличному виду:

$$\int x\sin xdx = \left| \begin{matrix} u = x & dv = \sin xdx \\ du = dx & \int dv = \int \sin xdx \\ & v = -\cos x \end{matrix} \right| = -x\cos x + \int \cos xdx = -x\cos x + \sin x + c.$$

Задания для самостоятельного решения:

Вычислите следующие интегралы методом интегрирования по частям:

1 вариант	**2 вариант**	**3 вариант**
1) $\int x\cos xdx$; 2) $\int xe^x dx$; 3) $\int e^{2x}\cos xdx$.	1) $\int (1-x)\sin xdx$; 2) $\int \mathrm{arctg}\,xdx$; 3) $\int e^x \cos(x-3)dx$.	1) $\int \frac{\ln xdx}{x^3}$; 2) $\int x\cos 3xdx$; 3) $\int 2xe^x dx$.

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте суть метода интегрирования по частям.

Литература: [4, с. 310, с. 316], [5, с. 219-222].

Практическое занятие № 19

Вычисление определенных интегралов различными способами

Цель работы:

студент должен:

знать:

- формулу Ньютона-Лейбница;
- суть методов вычисления определенных интегралов;

уметь:

- вычислять определенные интегралы методами: замены переменной, по частям.

Сведения из теории:

Для вычисления определенного интеграла от функции $f(x)$ в том случае, когда можно найти соответствующий неопределенный интеграл $F(x)$, служит формула Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

т.е. определенный интеграл равен разности значений первообразной при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Пример 78.

Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^{10}(3t^2+2t+1)dt$.

Решение:

по формуле Ньютона – Лейбница:

$$\int\limits_2^{10}(3t^2+2t+1)dt=\left(\frac{3t^3}{3}+\frac{2t^2}{2}+t\right)\Bigg|_2^{10}=\left(t^3+t^2+t\right)\Big|_2^{10}=$$

$$=\left(10^3+10^2+10\right)-\left(2^3+2^2+2\right)=1110-14=1096.$$

Вычисление определенного интеграла методом замены переменной

При вычислении определенного интеграла методом замены переменной (способом подстановки) определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ преобразуется с помощью подстановки $u=g(x)$ в определенный интеграл относительно новой переменной u. При этом старые пределы интегрирования a и b заменяются соответственно новыми пределами интегрирования α и β, которые вычисляются по формулам: $\alpha=g(a)$ и $\beta=g(b)$.

Пример 79.

Вычислить определенный интеграл $\int\limits_2^3(2x-1)^3dx$.

Решение:

преобразуя части подынтегрального выражения, приведем заданный интеграл к табличному виду, далее воспользуемся формулой Ньютона – Лейбница:

$$\int\limits_2^3(2x-1)^3dx=\left|\begin{matrix} u=2x-1 \\ du=(2x-1)'dx \\ du=2dx \\ dx=\dfrac{1}{2}du \end{matrix}\quad \begin{matrix} u_1=2\cdot3-1=5 \\ u_2=2\cdot2-1=3 \end{matrix}\right|=\int\limits_3^5 u^3\frac{1}{2}du=\frac{1}{2}\cdot\frac{u^4}{4}\Bigg|_3^5=$$

$$=\frac{5^4}{8}-\frac{3^4}{8}=\frac{625-81}{8}=\frac{544}{8}=68.$$

Интегрирование по частям в определенном интеграле

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ и их производные непрерывны в промежутке $[a;\,b]$, то формула интегрирования по частям для определенного интеграла имеет вид:

$$\int\limits_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int\limits_a^b vdu.$$

Задания для самостоятельного решения:

Вычислите следующие интегралы:

1 вариант	**2 вариант**	**3 вариант**
1) Методом замены переменной: $\int\limits_{-1}^{2}(x^2+3)^5xdx$.	1) Методом замены переменной:	1) Методом замены переменной: $\int\limits_{-1}^{0}\dfrac{6x^2dx}{(1-2x^3)^4}$.

2) Методом интегрирования по частям: $\int_{0}^{\pi/2} x\cos xdx$.	$\int_{2}^{3} 4(x^4-1)^2 x^3 dx$. 2) Методом интегрирования по частям: $\int_{\pi/3}^{\pi/2} (1-x)\sin xdx$.	2) Методом интегрирования по частям: $\int_{1}^{e} \frac{\ln xdx}{x^3}$.

Контрольные вопросы:

1. Какая функция называется первообразной для функции *f(x),* при $x\in(a;b)$?
2. Что называется неопределенным интегралом?
3. Перечислите основные формулы интегрирования.
4. Сформулируйте суть метода непосредственного интегрирования.

Литература: [4, с. 310, с. 316], [5, с. 219-222].

Практическое занятие № 20

Решение уравнений: разложение на множители, введение новых переменных, подстановка

Цель работы:

студент должен:

знать:

- способы решения уравнений;

уметь:

- решать уравнения различными способами.

Сведения из теории:

Метод разложения на множители

Суть данного метода в том, чтобы путем равносильных преобразований представить левую часть исходного уравнения, содержащую неизвестную величину в какой-либо степени, в виде произведения двух выражений, содержащих неизвестную величину в меньшей степени. При этом справа от знака равенства должен оказаться ноль. Проще всего уяснить эту идею на конкретном примере.

Пример 83.

Решите уравнение методом разложения на множители: $2{,}5x^2+4x=0$.

Решение:

осуществим разложение на множители (представим исходное выражение в виде произведения). Для этого вынесем переменную x за скобки:

$$x(2{,}5x+4)=0.$$

Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю.

Следовательно,

$$x=0 \text{ или } 2{,}5x+4=0.$$

Из последнего уравнения получаем:

$$2{,}5x=-4 \text{ или } x=-1{,}6.$$

Ответ: $x=0$ и $x=-1{,}6$.

Задача для самостоятельного решения №1. Решите уравнение методом разложения на множители: $3x^2+1{,}5x=0$.

Метод замены переменной

Суть данного метода в том, чтобы удачным образом заменить сложное выражение, содержащее неизвестную величину, новой переменной, в результате чего уравнение принимает более простой вид. Далее полученное уравнение решается относительно новой переменной, после чего происходит возврат к исходной переменной. Все эти идеи проще осознать на конкретном примере.

Задача для самостоятельного решения №2. Решите уравнение методом замены переменной: $9x^4 - 24x^2 + 7 = 0$.

Пример 85.

Решите уравнение методом замены переменной: $\dfrac{4x}{4x^2 - 8x + 7} + \dfrac{3x}{4x^2 - 10x + 7} = 1$.

Решение:

обращаем внимание на то, что $x = 0$ не является корнем данного уравнения. Следовательно, без потери или приобретения лишних корней можно разделить числитель и знаменатель обеих дробей на x. Тогда уравнение принимает вид:

$$\frac{4}{4x - 8 + \frac{7}{x}} + \frac{3}{4x - 10 + \frac{7}{x}} = 1.$$

Введем новую переменную: $t = 4x + \dfrac{7}{x}$. Тогда уравнение примет вид:

$$\frac{4}{t - 8} + \frac{3}{t - 10} = 1.$$

Выполнив элементарные преобразования: приведем дроби к общему знаменателю, приведем подобные слагаемые, получим:

$$\frac{t^2 - 25t + 144}{(t - 8)(t - 10)} = 0.$$

Дробь равна нулю, если нулю равен ее числитель, а знаменатель при этом не равен нулю. То есть уравнение равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} t^2 - 25t + 144 = 0 \\ t \neq 8 \\ t \neq 10 \end{cases}.$$

Решив первое уравнение системы, имеем: t=16 или t=9.

Переходя к обратной подстановке, получаем:

1. $4x + \dfrac{7}{x} = 16$, что при $x \neq 0$ равносильно уравнению $4x^2 - 16x + 7 = 0$, решая которое, получаем $x = \dfrac{1}{2}$ или $x = \dfrac{7}{2}$.

2. $4x + \dfrac{7}{x} = 9$ что при $x \neq 0$ равносильно уравнению $4x^2 - 9x + 7 = 0$, у которого решений нет, поскольку его дискриминант отрицателен.

Ответ: $\dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{2}$.

Контрольные вопросы:

1. В чем суть решения уравнения методом разложения на множители?

2. В чем суть решения уравнения методом замены переменной?
Литература: [16]

Практическая работа № 22
Решение неравенств методом интервалов
Цель работы:
студент должен:
знать:
- правила решения простых, дробно-рациональных неравенств с одной переменной;

уметь:
- решать неравенства методом интервалов.

Сведения из теории:

Пусть заданное неравенство имеет вид: $\dfrac{f(x)}{g(x)} \vee 0$. Для решения этого неравенства используется так называемый *метод интервалов*, который состоит в следующем.

1. На числовую ось наносят точки x_1, , x_n разбивающие ее на промежутки, в которых выражение $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ определено и сохраняет знак («плюс» или «минус»). Такими точками могут быть корни уравнений $f(x)=0$ и $g(x)=0$. Соответствующие этим корням точки отмечают на числовой оси: закрашенными кружками – точки, удовлетворяющие заданному неравенству, а светлыми кружками – не удовлетворяющие ему.

2. Определяют и отмечают на числовой оси знак выражения $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ для значений, принадлежащих каждому из полученных промежутков. Достаточно определить знак функции $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ в любом таком промежутке, а в остальных промежутках знаки «плюс» и «минус» будут чередоваться.

Изменение знаков удобно иллюстрировать с помощью волнообразной кривой (*кривой знаков*), проведенной через отмеченные точки и лежащей выше или ниже числовой оси в соответствии со знаком дроби $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ в рассматриваемом промежутке. Промежутки, которые содержат точки, удовлетворяющие данному неравенству, иногда покрывают штрихами. Заштрихованная область в совокупности с полученными точками будет являться ответом к неравенству:

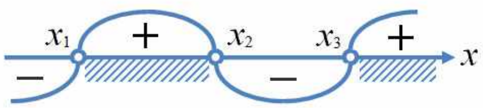


Рисунок 25. Кривая знаков

Пример 89.

Решите неравенство: $\dfrac{1}{x^2-5x+6} \le \dfrac{1}{2}$.

Решение:

упрощаем неравенство путем равносильных преобразований: при умножении или делении обеих частей неравенства на отрицательное число, знак неравенства меняется на противоположный:

$$\frac{1}{x^2-5x+6}-\frac{1}{2}\le 0.$$

Приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{2-(x^2-5x+6)}{x^2-5x+6}\le 0,$$

$$\frac{-x^2+5x-4}{x^2-5x+6}\le 0,$$

$$\frac{x^2-5x+4}{x^2-5x+6}\ge 0.$$

Выражения, стоящие в числителе и знаменателе, можно разложить на множители, тогда неравенство примет вид:

$$\frac{(x-4)(x-1)}{(x-2)(x-3)}\ge 0.$$

Далее находим корни уравнений $(x-4)(x-1)=0$ и $(x-2)(x-3)=0$.

Из первого получаем x_1=4, x_2=1. Из второго получаем x_3=2, x_4=3.

Наносим на числовую прямую получившиеся точки, причем точки x_1, x_2 обозначаем закрашенными кружочками (для них неравенство выполняется), а точки x_3, x_4 светлыми (при этих значениях, выражение, стоящее слева от знака неравенства, не имеет смысла).

Определяем теперь знаки выражения $\frac{(x-4)(x-1)}{(x-2)(x-3)}$ на полученных промежутках (подставляем любое значение x из каждого полученного промежутка в данное выражение), изображаем кривую знаков, заштриховываем те промежутки, на которых исходное неравенство выполняется:

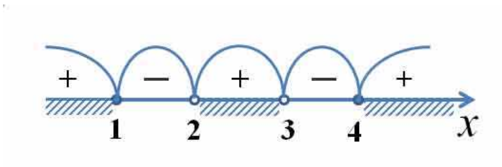


Рисунок 26. Кривая знаков выражения $\frac{(x-4)(x-1)}{(x-2)(x-3)}$

Итак, исходному неравенству удовлетворяют следующие значения: xЄ(-∞; 1]U(2; 3)U[4; +∞).

Задача для самостоятельного решения №1. Решите неравенство: $\frac{x+17}{x^2-x-6}\ge 0$.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение неравенства с одной переменной.
2. В чем суть метода интервалов?

Литература: [16]

Практическая работа № 23

Решение задач на перебор вариантов

Цель работы:

студент должен:

знать:

- определение соединений, их видов;
- определение вероятности;
- теоремы сложения, умножения вероятностей;

уметь:

- по условию задачи различать виды соединений;
- вычислять разные виды соединений;
- вычислять вероятность событий.

Сведения из теории:

Соединения, их виды

Группы, составленные из каких – либо элементов, называются *соединениями.*

Различаю три основных вида соединений: *размещения, перестановки и сочетания.*

Размещениями из n элементов по m в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга либо самими элементами, либо порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по m обозначается и вычисляется по формуле:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...[n-(m-1)].$$

Перестановками из n элементов называются такие соединения из всех n элементов, которые отличаются друг от друга порядком расположения элементов.

Перестановки представляют частный случай размещений из n элементов по n в каждом.

Число всех перестановок из n элементов равно произведению последовательных чисел от 1 до n включительно:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot .. \cdot (n-1)n,$$

$n!$-читается «n-факториал», причем $0!=1$ и $1!=1$.

Используя приведенные выше определения имеем формулы:

$$A_n^m = \frac{P_n}{P_{n-m}} = \frac{n!}{(n-m)!},$$

при решении задач часто используется равенство:

$$A_n^{m+1} = (n-m)A_n^m.$$

Сочетаниями из n элементов по m в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Число сочетаний из n элементов по m обозначается и вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_n^m},$$

которую можно записать также в виде

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

или

$$C_n^m = \frac{n(n-1)...[n-(m-1)]}{m!}.$$

Кроме того, при решении задач используются следующие формулы, выражающие основные свойства сочетаний:

$$C_n^m = C_n^{n-m} \ (0 \le m \le n), \ C_n^n = 1; \ C_n^0 = 1; \ C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$$

Пример 94.

Найти число размещений из 10 элементов по 4.

Решение:

по формуле $A_n^m = n(n-1)(n-2)...[n-(m-1)]$:

$$A_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040.$$

Пример 97.

Сколькими способами из восьми кандидатов можно выбрать три лица на три должности?

Решение:

условию задачи соответствуют размещения 3 из 8, имеем:

$$A_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336.$$

Случайные события

Изучение каждого явления в порядке наблюдения или производства опыта связано с осуществлением некоторого комплекса условий (испытаний). Всякий результат или исход испытания называется *событием*.

Если событие при заданных условиях может произойти или не произойти, то оно называется *случайным*.

В том случае, когда событие должно непременно произойти, его называют *достоверным*, а в том случае, когда оно заведомо не может произойти, *невозможным*.

События называются *несовместными*, если каждый раз возможно появление только одного из них. События называются *совместными*, если в данных условиях появление одного из этих событий не исключает появление другого при том же испытании.

События называются *противоположными*, если в условиях испытания они, являясь единственными его исходами, несовместны.

Вероятность события рассматривается как мера объективной возможности появления случайного события.

Классическое определение вероятности.

Вероятностью события A называется отношение числа благоприятных исходов m, к числу всех возможных исходов n:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Вероятность любого события не может быть меньше нуля и больше единицы, т. е. $0 \le P(A) \le 1$.

Невозможному событию соответствует вероятность $P(A)=0$, а достоверному – вероятность $P(A)=1$.

Пример 98.

В лотерее из 1000 билетов 200 выигрышных. Вынимают наугад один билет. Какова вероятность, что этот билет выигрышный?

Решение:

количество благоприятных событий, удовлетворяющих условию задачи $m=200$.

Число всех возможных вариантов n=1000.

По определению вероятности: $P(A)$=200/1000=0,2.

Задания для самостоятельного решения:

Решить следующие задачи, используя определение сочетаний, их видов:

1 вариант	**2 вариант**
1) Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 8, 9 так, чтобы в каждом числе не было одинаковых цифр? 2) Из 6 открыток надо выбрать 3. Сколькими способами это можно сделать? 3) Решите уравнение: $A_x^3 = \frac{1}{20} A_x^4$.	1) Сколькими способами могут разместиться 5 человек вокруг круглого стола? 2) Сколькими способами можно составить флаг, состоящий из трех горизонтальных полос различных цветов, если имеется материал семи различных цветов? 3) Решите уравнение: $30x = A_x^3$.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение соединения, их виды?
2. Приведите формулы для вычисления разных видов соединений.
3. Дайте определение случайного события, их виды. Приведите примеры.
4. Дайте классическое определение вероятности.

Литература: [5, с. 234-238]

Практическая работа № 24

Сложение и умножение вероятностей

Цель работы:

студент должен:

знать:

- теоремы сложения, умножения вероятностей;

уметь:

- вычислять вероятность событий.

Сведения из теории:

Вероятность несовместных событий

Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Пример 105.

В ящике в случайном порядке разложены 20 деталей, причем пять из них стандартные. Рабочий берет наудачу три детали. Найти вероятность того, что, по крайней мере, одна из взятых деталей окажется стандартной (событие A).

Решение:

очевидно, что, по крайней мере, одна из взятых деталей окажется стандартной, если произойдет любое из трех несовместных событий: B – одна деталь стандартная, две нестандартные; C – две детали стандартные, одна нестандартная; $Д$ – три детали стандартные.

Т.о., событие A можно представить в виде суммы этих трех событий: $A=B+C+Д$.

Тогда $P(A)=P(B)+P(C)+P(Д)$.

Вычислим вероятность каждого события:

$$P(B) = \frac{C_5^1 \times C_5^2}{C_{20}^3} = \frac{5 \times 15 \times 14}{1 \times 1 \times 2} = \frac{35}{76}$$

$$P(C)=\frac{C_5^2\times C_{15}^1}{C_{20}^3}=\frac{5\times4\times15\times1\times2\times3}{1\times2\times1\times20\times19\times18}=\frac{5}{38}$$

$$P(Д)=\frac{C_5^3}{C_{20}^3}=\frac{5\times4\times3\times1\times2\times3}{1\times2\times3\times20\times19\times18}=\frac{1}{114}$$

Итак,

$$P(A)=\frac{35}{76}+\frac{5}{38}+\frac{1}{114}=\frac{137}{228}=0{,}601$$

Вероятность совместных событий

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

Пример 106.

Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 3, либо 5, либо тому и другому одновременно?

Решение:

пусть A – число кратно 3, B – число кратно 5. Всего имеется 90 двузначных чисел: 10, 11, …, 98, 99. Из них 30 – кратные 3, 18 – кратные 5 и шесть чисел одновременно кратны и 3 и 5, поэтому:

$$P(A)=\frac{30}{90}=\frac{1}{3},\ \ P(B)=\frac{18}{90}=\frac{1}{5},\ \ P(AB)=\frac{6}{90}=\frac{1}{15}.$$

Т.к. A и B совместные события, то по формуле имеем:

$$P(A)=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{15}=\frac{7}{15}=0{,}467.$$

Задания для самостоятельного решения:

Решите задачи, используя теоремы сложения, умножения вероятностей:

1) В первой урне находятся 10 белых и 4 черных шаров, а во второй 5 белых и 9 черных шаров. Из каждой урны вынули по шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными?

2) Трое учащихся на экзамене независимо друг от друга решают одну и ту же задачу. Вероятности ее решения этими учащимися равны 0,8, 0,7 и 0,6 соответственно. Найдите вероятность того, что хотя бы один учащийся решит задачу.

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте теоремы сложения, умножения вероятностей.

Литература: [5, с. 234-238]

Практическое занятие №25
Параллельность прямой и плоскости

Цель работы:

студент должен:

знать:

- признаки параллельности прямой и плоскости;
- признаки параллельности плоскостей;
- признаки параллельности прямых в пространстве;

уметь:

- строить параллельные прямые, плоскости в пространстве.

Сведения из теории:

Признаки параллельности прямой и плоскости

1) Если прямая, лежащая вне плоскости, параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна этой плоскости.

2) Если прямая и плоскость перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны.

Признаки параллельности плоскостей

1) Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

2) Если две плоскости перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны.

Признаки параллельности прямых в пространстве

1) Если две прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, то они параллельны.

2) Если в одной из пересекающихся плоскостей лежит прямая, параллельная другой плоскости, то она параллельна линии пересечения плоскостей.

Параллельные прямые

Возьмём, например, две такие прямые AB и DE, из которых одна пересекает некоторую плоскость P, а другая лежит на ней, но не проходит через точку (C) пересечения первой прямой и плоскости Р.

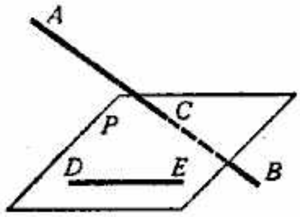


Рисунок 33. Непересекающиеся прямые

Через такие две прямые нельзя провести плоскость, потому что в противном случае через прямую и точку C проходили бы две различные плоскости: одна P, пересекающая прямую AB, и другая, содержащая её, а это невозможно.

Две прямые, не лежащие в одной плоскости, конечно, не пересекаются, сколько бы их ни продолжали; однако их не называют параллельными.

Две прямые, не лежащие в одной плоскости, называются *скрещивающимися*.

Прямая и плоскость параллельные между собой

Плоскость и прямая, не лежащая в этой плоскости, называются параллельными, если они не пересекаются, сколько бы их ни продолжали.

Если прямая (AB) параллельна какой-нибудь прямой (CD), расположенной в плоскости (P), то она параллельна самой плоскости.

Если плоскость (R) проходит через прямую (AB), параллельную другой плоскости (P), и пересекает эту плоскость, то линия пересечения (CD) параллельна первой прямой (AB).

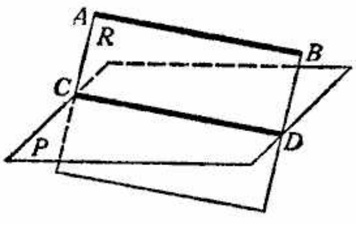


Рисунок 34. Прямая и плоскость параллельные между собой

Если прямая (AB) параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей (P и Q), то она параллельна линии их пересечения (CD).

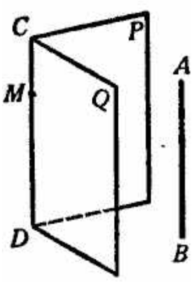


Рисунок 35. Параллельность прямой линии пересечения плоскостей

Если две прямые (AB и CD) параллельны третьей прямой (EF), то они параллельны между собой.

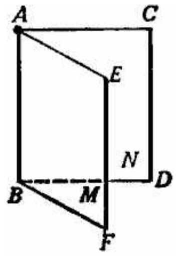


Рисунок 36. Параллельность трех прямых

Параллельные плоскости

Две плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются, сколько бы их ни продолжали.

Если две пересекающиеся прямые (AB и AC) одной плоскости (P) соответственно параллельны двум прямым (A_1B_1 и A_1C_1) другой плоскости(Q), то эти плоскости параллельны. Прямые AB и AC параллельны плоскости Q.

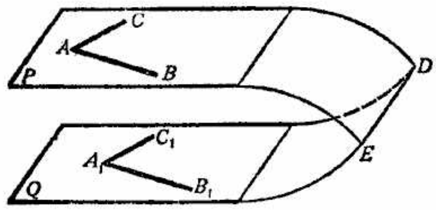


Рисунок 37. Параллельные плоскости

Задания для самостоятельного решения:

Решите следующие задачи (выполнить чертеж, дать подробные пояснения):

1) Сторона AC треугольника ABC параллельна плоскости a, а стороны AB и BC пересекаются с этой плоскостью в точках M и N. Докажите, что треугольники ABC и MBN подобны.

2) Сколько существует плоскостей, проходящих через данные прямую и точку в пространстве?

3) В пространстве даны прямая a и точка M. Сколько существует прямых, проходящих через M и параллельных прямой a?

4) Даны плоскость и точка M вне плоскости. Сколько существует прямых, проходящих через M и параллельных плоскости?

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте признаки параллельности прямой и плоскости.
2. Сформулируйте признаки параллельности плоскостей.
3. Сформулируйте признаки параллельности прямых в пространстве.

Литература: [10, §15, с. 138-143]

Практическое занятие №26

Изображения пространственных фигур

Цель работы:

студент должен:

знать:

- свойства параллельного проектирования;

уметь:

- изображать пространственные фигуры на плоскости с помощью параллельного проектирования.

Сведения из теории:

Изображение пространственных фигур на плоскости

Для изображения пространственных фигур на плоскости обычно пользуются параллельным проектированием.

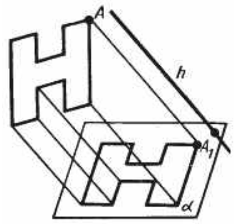


Рисунок 44. Изображение пространственных фигур на плоскости

Прямолинейные отрезки фигуры изображаются на плоскости чертежа отрезками.

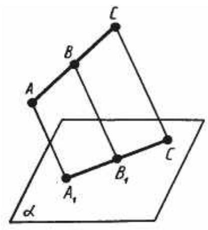


Рисунок 45. Изображение отрезка на плоскости

Действительно, все прямые, проектирующие точки отрезка AC, лежат в одной плоскости, пересекающей плоскость a по прямой A_1C_1. Произвольная точка B отрезка AC изображается точкой B_1 отрезка A_1C_1.

Отношение отрезков одной прямой или параллельных прямых сохраняется при параллельном проектировании:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}.$$

Пример 113.

Дана параллельная проекция треугольника. Как построить проекции медиан этого треугольника?

Решение:

при параллельном проектировании сохраняется отношение отрезков прямой. Поэтому середина стороны треугольника проектируется в середину проекции этой стороны. Следовательно, проекции медиан треугольника будут медианами его проекции.

Задания для самостоятельного решения:

Решите задачи:

1) Построить изображение правильного треугольника ABC , изображение высоты BH и биссектрисы AK.

2) Трапеция *ABCD* – параллельная проекция равнобедренной трапеции. Построить ось симметрии и высоту данной трапеции.

3) Начертите параллельную проекцию ромба *ABCD*, имеющего угол $A=60^0$. Постройте изображение высоты этого ромба, проведенной из вершины острого угла.

Контрольные вопросы:

1. Что называется параллельной проекцией?
2. Перечислите свойства параллельного проектирования.
3. Что является параллельной проекцией отрезка, треугольника, прямоугольника, квадрата, окружности?
4. Какие величины не изменяются при параллельном проецировании? (длина отрезка, градусная мера углов, отношения длин отрезков, отношение площадей двух фигур)?
5. Может ли при параллельном проецировании параллелограмма получиться трапеция и наоборот?

Литература: [10, с. 170-175]

Практическое занятие №27

Вершины, ребра, грани многогранника

Цель работы:

студент должен:

знать:

- свойство, связывающее число вершин, ребер и граней многогранника;

уметь:

- устанавливать связь между числом плоских углов *П* многогранника и числом его ребер *Р*.

Сведения из теории:

Для выпуклых многогранников имеет место свойство, связывающее число его вершин, ребер и граней, доказанное в 1752 году Леонардом Эйлером, и получившее название теоремы Эйлера.

Прежде чем его сформулировать рассмотрим известные нам многогранники и заполним следующую таблицу, в которой *В* – число вершин, *Р* – ребер и *Г* – граней данного многогранника:

Название многогранника	*В*	*Р*	*Г*
Треугольная пирамида	4	6	4
Четырехугольная пирамида	5	8	5
Треугольная призма	6	9	5
Четырехугольная призма	8	12	6
n-угольная пирамида	$n+1$	$2n$	$+1$
n-угольная призма	$2n$	$3n$	$n+2$
n-угольная усеченная пирамида	$2n$	$3n$	$n+2$

Из этой таблицы непосредственно видно, что для всех выбранных многогранников имеет место равенство *В*-*Р*+*Г*=2. Оказывается, что это равенство справедливо не только для этих многогранников, но и для произвольного выпуклого многогранника.

Заметим, что многоугольники можно деформировать, увеличивать, уменьшать или даже искривлять их стороны, лишь бы при этом не происходило разрывов сторон. Число вершин, ребер и граней при этом не изменится.

Для полученного разбиения многоугольника на более мелкие многоугольники имеет место равенство:

$$В\text{-}Р+Г=1,$$

где *В* – общее число вершин, *Р* – общее число ребер и *Г* – число многоугольников, входящих в разбиение. Ясно, что *Г*=*Г*–1, где *Г* – число граней данного многогранника.

В любом выпуклом многограннике найдется грань с числом ребер меньшим или равным пяти

Для любого многогранника имеет место неравенство $3В \leq 2Р$.

Задания для самостоятельного решения:

1) Может ли число вершин многогранника равняться числу его граней?

2) Установите связь между числом плоских углов *П* многогранника и числом его ребер *Р*.

3) Гранями выпуклого многогранника являются только треугольники. Сколько у него вершин *В* и граней *Г*, если он имеет: а) 12 ребер; б) 15 ребер? Приведите примеры таких многогранников.

4) Из каждой вершины выпуклого многогранника выходит три ребра. Сколько он имеет вершин *В* и граней *Г*, если у него: а) 12 ребер; б) 15 ребер? Нарисуйте эти многогранники.

5) В каждой вершине выпуклого многогранника сходится по четыре ребра. Сколько он имеет вершин *В* и граней *Г*, если число ребер равно 12? Нарисуйте эти многогранники.

Контрольные вопросы:

1. Запишите формулу, связывающую число вершин, ребер и граней многогранника.

Практическое занятие №28

Параллелепипед. Куб

Цель работы:

студент должен:

знать:

- определение параллелепипеда, куба;
- свойства прямоугольного параллелепипеда;
- формулы объема прямоугольного параллелепипеда, куба;

уметь:

- строить параллелепипед, куб;
- вычислять объем прямоугольного параллелепипеда, куба.

Сведения из теории:

Параллелепипедом называется призма, основаниями которой служат параллелограммы. Все шесть граней параллелепипеда – параллелограммы. Отрезки, соединяющие вершины параллелепипеда, не принадлежащие одной и той же грани, называются *диагоналями параллелепипеда*.

Свойства параллелепипеда

1) Середина диагонали параллелепипеда является его центром симметрии.

2) Противолежащие грани параллелепипеда попарно равны и параллельны.

3) Все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

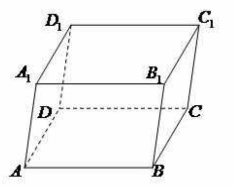


Рисунок 46. Параллелепипед

Параллелепипед, боковые ребра которого перпендикулярны плоскости основания параллелепипеда, называется *прямым параллелепипедом* ($ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямой параллелепипед).

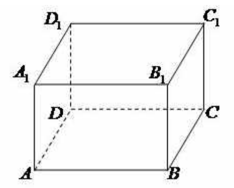


Рисунок 47. Прямоугольный параллелепипед

Прямой параллелепипед, основанием которого служит прямоугольник, называется *прямоугольным параллелепипедом*. Все грани прямоугольного параллелепипеда – прямоугольники. Длины трех ребер прямоугольного параллелепипеда, выходящих из одной вершины, называются измерениями прямоугольного параллелепипеда.

Свойства прямоугольного параллелепипеда

1) Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений:

$$d^2=a^2+b^2+c^2.$$

2) Все диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.

3) Для куба формула упрощается: $4d^2=12a^2$.

Пример 114.

Найти длину стороны куба, если его диагональ равна 5 см.

Решение:

из формулы для диагонали куба выразим его сторону:

$$a^2=\frac{4d^2}{12}.$$

Тогда,

$$a=\sqrt{\frac{4d^2}{12}}=\frac{d}{\sqrt{3}}=\frac{5}{\sqrt{3}}.$$

Т. к. параллелепипед есть частный случай призмы, то площадь поверхности и объем параллелепипеда вычисляются по формулам для площади поверхности и объема призмы. Кроме того, объем прямоугольного параллелепипед можно вычислять по формуле:

$$V=abc,$$

где a, b, c – три измерения прямоугольного параллелепипеда.

Куб

Прямоугольный параллелепипед с равными измерениями называется кубом. Все грани куба – равные квадраты.

Объем куба вычисляется по формуле:

$$V=a^3,$$

где a – измерение куба.

Как найти сумму длин всех рёбер параллелепипеда

Для удобства введем обозначения: A и B стороны основания параллелепипеда; C – его боковая грань.

Т. о., в основании параллелепипеда лежит параллелограмм со сторонами A и B. Параллелограмм – это четырехугольник, противоположные стороны которого равны и параллельны. Из этого определения следует, что против стороны A лежит равная ей сторона A. Поскольку противолежащие грани параллелепипеда равны (вытекает из определения), то верхняя его грань тоже имеет 2 стороны равные A. Таким образом, сумма всех четырех этих сторон равна $4A$.

То же, можно сказать, и о стороне B. Противоположная ей сторона в основании параллелепипеда равна B. Верхняя (противолежащая) грань параллелепипеда тоже имеет 2 стороны, равные B. Сумма всех четырех этих сторон равна $4B$.

Боковые грани параллелепипеда тоже являются параллелограммами (вытекает из свойств параллелепипеда). Ребро C одновременно является стороной двух соседних граней параллелепипеда. Поскольку противоположные грани параллелепипеда попарно равны, то все его боковые ребра равны между собой и равны C. Сумма боковых ребер – $4C$.

Таким образом, сумма всех ребер параллелепипеда: $4A+4B+4C$ или $4(A+B+C)$.

Частный случай прямого параллелепипеда – куб. Сумма всех его ребер равна $12A$.

Задания для самостоятельного решения:

Решите задачи:

1) Надо покрасить пол в комнате. Расход краски на 1 $м^2$ – 120 *г*, комната имеет размеры 5 *м* и 4 *м*. Сколько потребуется краски?

2) Надо оклеить комнату с одним окном и дверью обоями от пола до потолка. Длина комнаты 5 *м*, ширина – 4 *м*, высота – 3 *м*. Площадь окна 3 $м^2$, площадь двери 2 $м^2$. Обои продаются целыми рулонами, 1 рулон на 10 $м^2$. Сколько потребуется рулонов обоев?

3) Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 2. Площадь поверхности параллелепипеда равна 16. Найдите его диагональ.

4) Площадь грани прямоугольного параллелепипеда равна 12. Ребро, перпендикулярное этой грани, равно 4. Найдите объем параллелепипеда.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение параллелепипеда, куба, выполните соответствующие чертежи.
2. Перечислите свойства прямоугольного параллелепипеда.
3. Запишите формулы для вычисления объема параллелепипеда, куба.

Литература: [10, с. 143]

Практическое занятие №29
Сечения куба, призмы, пирамиды

Цель работы:

студент должен:

знать:

- метод «следов»;

- правила построения сечений многогранников;

уметь:

- строить сечения куба, призмы, пирамиды.

Сведения из теории:

Сечения куба плоскостью

Если плоскость пересекает три ребра куба, выходящих из одной вершины, то в сечении получается треугольник (рис. 48 слева). При этом если отсекаемые плоскостью отрезки ребер равны, то в сечении получается равносторонний треугольник, если равны два отрезка из трех, то получается равнобедренный треугольник, наконец, если все три отрезка различны, то в сечении получается разносторонний треугольник.

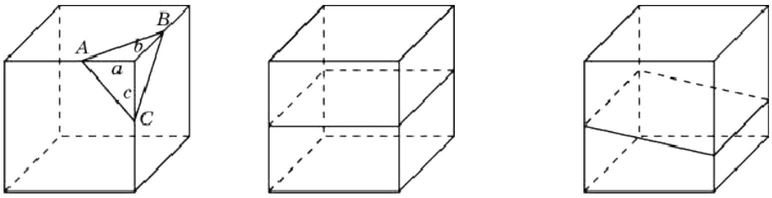


Рисунок 48. Сечения куба плоскостью

В сечении куба плоскостью не могут получаться прямоугольный или тупоугольный треугольники.

Выясним, какие четырехугольники могут получаться в сечении куба плоскостью.

Ясно, что если плоскость параллельна одной из граней куба, то в сечении получается квадрат (рис. 48 посередине). Если плоскость параллельна одному из ребер куба, то в сечении получается прямоугольник (рис. 48 справа). Если плоскость пересекает четыре параллельных ребра куба, то в сечении получается параллелограмм (рис. 49 слева).

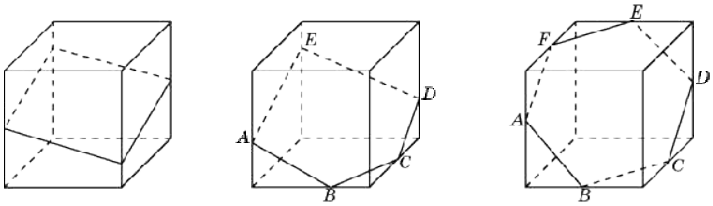


Рисунок 49. Сечения куба плоскостью

На рис. 49 посередине показано сечение куба плоскостью в форме пятиугольника *ABCDE*. Прямые *AB* и *DE*, *CD* и *AE* параллельны, как линии пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью.

На рис. 49 справа показано сечение куба плоскостью в форме шестиугольника *ABCDEF*. Прямые *AB* и *DE*, *BC* и *EF*, *CD* и *AF* параллельны, как линии пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью.

Поскольку у куба имеется только шесть граней, то в сечении куба плоскостью не может получиться многоугольник с числом сторон, большим шести.

Построение сечений многогранников

Для построения сечений используют метод «следов», заключающийся в нахождении точки пересечения прямой и плоскости по заданным двум точкам этой прямой и их проекциям на плоскость.

Пример 117.

Пусть прямая k проходит через точки A, B и известны параллельные проекции A', B' этих точек на плоскость π. Требуется найти точку пересечения прямой AB с плоскостью π.

Решение:

через точки A', B' проведем прямую k'. Тогда пересечение прямой k с прямой k' и будет искомым пересечением прямой k с плоскостью π (см. рис. 50).

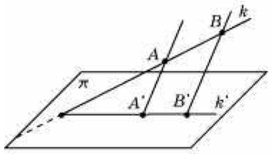


Рисунок 50.

Задания для самостоятельного решения:

Решите задачи:

1) Какой фигурой является сечение куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через вершины B_1, D и середину ребра CC_1?

2) Какой фигурой является сечение куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через середины ребер AB, BC и DD_1?

3) Через середину ребра куба, перпендикулярно скрещивающейся с этим ребром диагонали, проведено сечение. Определите его вид.

4) Какой фигурой является сечение куба плоскостью, которая проходит через две противоположные вершины нижнего основания и середину одного из ребер верхнего основания? Найдите его периметр, если длина ребра куба равна 1.

Контрольные вопросы:

1. Может ли в сечении куба плоскостью получиться: а) трапеция; б) равнобедренная трапеция; в) неравнобедренная трапеция; г) прямоугольная трапеция; д) тупоугольная трапеция?
2. Какие многоугольники можно получить в сечении четырехугольной пирамиды плоскостью?
3. Какие могут быть сечения правильного тетраэдра плоскостью?

Литература: [10, с. 144-151]

Практическое занятие №30

Представление о правильных многогранниках (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр)

Цель работы:

студент должен:

знать:

- определение правильных многогранников;
- виды, элементы, свойства правильных многогранников;

уметь:

- строить правильные многогранники.

Сведения из теории:

Выпуклый многогранник называется *правильным*, если его гранями являются равные правильные многоугольники, и все многогранные углы равны.

Рассмотрим возможные правильные многогранники и прежде всего те из них, гранями которых являются правильные треугольники. Наиболее простым таким правильным многогранником является треугольная пирамида, гранями которой являются правильные треугольники (рис. слева). В каждой ее вершине сходится по три грани. Имея всего четыре грани, этот многогранник называется также *правильным* *тетраэдром*, или просто *тетраэдром*, что в переводе с греческого языка означает четырехгранник.

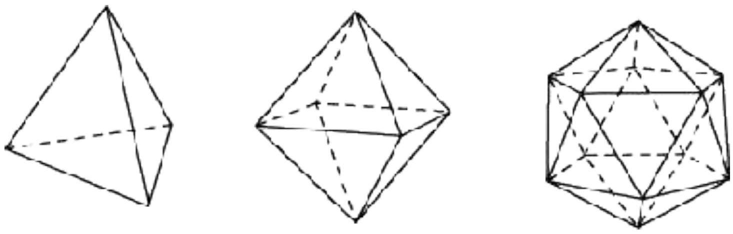


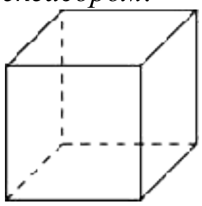
Рисунок 58. Правильные многогранники

Многогранник, гранями которого являются правильные треугольники, и в каждой вершине сходится четыре грани, изображен на рисунке посередине. Его поверхность состоит из восьми правильных треугольников, поэтому он называется *октаэдром*.

Многогранник, в каждой вершине которого сходится пять правильных треугольников, изображен на рисунке справа. Его поверхность состоит из двадцати правильных треугольников, поэтому он называется *икосаэдром*.

Заметим, что поскольку в вершинах выпуклого многогранника, не может сходиться более пяти правильных треугольников, то других правильных многогранников, гранями которых являются правильные треугольники, не существует.

Аналогично, поскольку в вершинах выпуклого многогранника может сходиться только три квадрата, то, кроме куба (рис. слева), других правильных многогранников, у которых гранями являются квадраты, не существует. Куб имеет шесть граней и поэтому называется также *гексаэдром*.



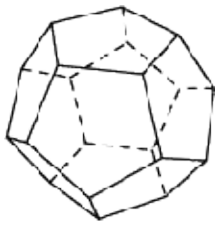


Рисунок 59. Правильные многогранники

Многогранник, гранями которого являются правильные пятиугольники, и в каждой вершине сходится три грани, изображен на рисунке справа. Его поверхность состоит из двенадцати правильных пятиугольников, поэтому он называется *додекаэдром*.

Задания для самостоятельного решения:

1) Чему равны плоские углы додекаэдра?

2) Представьте многогранник – бипирамиду, сложенную из двух правильных тетраэдров совмещением их оснований. Будет ли он правильным многогранником?

3) Является ли пространственный крест (фигура, составленная из семи равных кубов – рис. 60) правильным многогранником? Сколько квадратов ограничивает его поверхность? Сколько у него вершин B и ребер P?

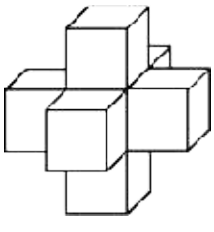


Рисунок 60.

4) Ребро октаэдра равно 1. Определите расстояние между его противоположными вершинами.

5) Сколько красок потребуется для раскраски граней правильных многогранников, так, чтобы соседние грани были окрашены в разные цвета?

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение правильного многогранника.
2. Сколько вершин, ребер и граней имеют: а) тетраэдр; б) октаэдр; в) куб; г) икосаэдр; д) додекаэдр?

Литература: [10, с. 176]

Практическое занятие №31

Шар и сфера, их сечения

Цель работы:

студент должен:

знать:

- определение шара, сферы, их элементов;

уметь:

- строить сечения шара.

Сведения из теории:

Шаром принято называть тело, ограниченное сферой, т.е. шар и сфера – это разные геометрические тела.

Сфера – это фигура, состоящая из всех точек пространства, удалённых от данной точки на данном расстоянии.

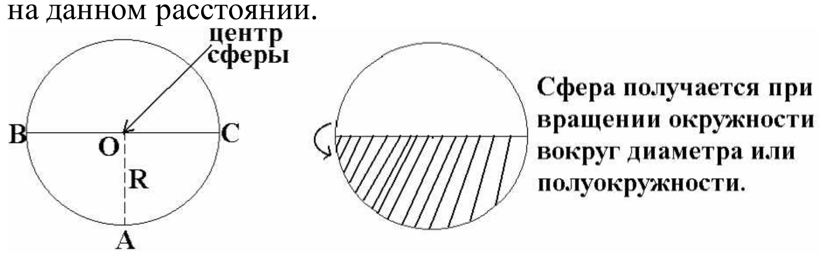


Рисунок 65. Сфера

Поверхность шара называют сферой. Если рассечь сферу плоскостью, получим в сечении окружность. Такие окружности имеют разные радиусы: чем дальше плоскость от центра сферы, тем меньше радиус сечения. Самые большие окружности получаются при сечении сферы плоскостями, проходящими через её центр. Такими большими окружностями на земной поверхности являются экватор и меридианы. А параллели – это сечения земной поверхности плоскостями, которые параллельны экваториальной плоскости.

Сферой называется фигура, состоящая из всех точек пространства, равноудалённых от данной точки. Эта точка называется *центром сферы и обычно обозначается О.*

Расстояние от точек сферы до её центра называется *радиусом сферы и обычно обозначается R. Радиусом* также называется любой отрезок, соединяющий точку сферы с её центром. *Сфера* – это граница шара. Центр, радиус и диаметр сферы являются также центром, радиусом и диаметром шара.

Шаром называется тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся на расстоянии не более чем на данное расстояние. Другими словами, *шар* – это объединение сферы и всех ее внутренних точек.

Всякое *сечение шара* плоскостью есть круг. Центр этого круга есть основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.

Основные геометрические формулы

Площадь сферы:

$$S=4\pi r^2=\pi d^2.$$

Объем шара, ограниченного сферой:

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

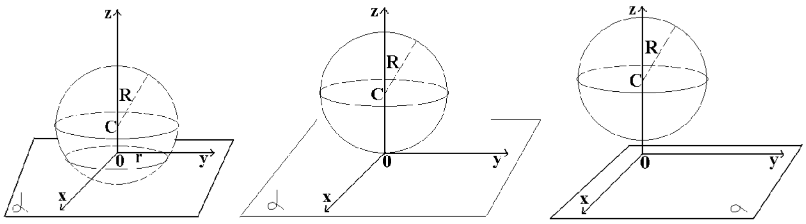


Рисунок 66. Взаимное расположение сферы и плоскости

Касательная плоскость к сфере

Плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, называется касательной плоскостью к сфере, а их общая точка называется точкой касания плоскости и сферы.

Радиус сферы, проведённый в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости.

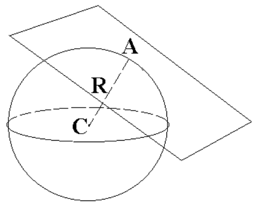


Рисунок 67. Касательная плоскость к сфере

Если радиус сферы перпендикулярен к плоскости, проходящей через его конец, лежащий на сфере, то эта плоскость является касательной к сфере.

Сечение шара

Всякое сечение шара плоскостью есть круг. Центр этого круга есть основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.

Рисунок 68. Сечение шара

Пример 122.

Два сечения шара радиуса 10 см параллельными плоскостями имеют радиусы, равные 6 см и 8 см. Найти расстояние между секущими плоскостями.

Решение:

находим расстояние каждой из параллельных плоскостей до центра шара из прямоугольных треугольников по теореме Пифагора:

$$d_1 = \sqrt{100 - 36} = 8 \text{ см}$$

или

$$d_2 = \sqrt{100 - 64} = 6 \text{ см}.$$

В зависимости от того, лежит ли центр шара между плоскостями или нет, получаем два различных ответа к задаче:

d=14 см.

Задания для самостоятельного решения:

Решите задачи:

1) Шар, радиус которого равен 41 дм, пересечен плоскостью на расстоянии 9 дм от центра. Вычислите площадь получившегося сечения.

2) Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная к нему плоскость. Как относится площадь полученного сечения к площади большого круга?

3) Радиус шара равен 63см. Точка находится на касательной плоскости на расстоянии 16 см от точки касания. Найти ее кратчайшее расстояние от поверхности шара.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение шара, сферы.
2. Запишите формулы площади сферы, объема шара.
3. Приведите примеры взаимного расположения сферы и плоскости.

Литература: [10, с. 282, 285]

Литература

1) Афанасьев О.Н., Бродский Я.С., Павлов А.Л. Математика для техникумов. – М.: Наука, 1991.

2) Афанасьев О.Н. Математика для техникумов. – М., Издательский центр «Академия», 2003.

3) Богомолов В.С. Основы высшей математики. – М., Издательский центр «Академия», 2007.

4) Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. – М.: Высшая школа, 2004.

5) Колмогоров А.Н., Абрамов А.Н., Дудницын Ю.П. и др.; Под ред. А.Н. Колмогорова. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений. – 10-е изд. – М.: Просвещение, 2010. – 384 с.: ил.

6) Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика: Учеб. пособие для техникумов. – М.: Высш.шк., 1991. – 480 с.: ил.

7) Луканкин Г.Л. Высшая математика для экономистов: курс лекций: учебное пособие для вузов / Г.Л. Луканкин, А.Г. Луканкин. – 2-е изд., стереотип. – М.: Издательство «Экзамен», 2009. – 285 с.

8) Математика для техникумов. Алгебра и начала анализа. Под ред. Г.Н.Яковлева – М.: Наука, 1987 – Часть 1.

9) Математика для техникумов. Алгебра и начала анализа. Под ред. Г.Н.Яковлева – М.: Наука, 1987 – Часть 2.

10) Математика для техникумов. Геометрия. Под ред. Г.Н.Яковлева – М.: Наука, 1989.

11) Математика: Учеб. для студ. образоват. учреждений сред. проф. образования/Игорь Дмитриевич Пехлецкий. – 2-е изд., стереотип. – М., Издательский центр «Академия», 2003. – 304 с.

12) Михеев В.С. Краткий справочник по математике. – Красногорск, 1996.

13) Пехлецкий И.Д. Математика – М., Издательский центр «Академия», 2001.

14) Подольский В.А. и др. Сборник задач по математике: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. – М., Издательский центр «Академия», 2004.

15) Сергиенко Л.Ю., Самойленко П.И. Планирование учебного процесса по математике: Учеб. – метод. пособие для преподавателей сред. спец. учеб. заведений. – М.: высш. шк., 1987. – 424 с.: ил.

16) Григорьев С.Г., Иволгина С.В. Математика: учебник для СПО, 2012, http://www.sprinter.ru/books/matematika-uchebnik-7-e-izd-ster-grigorev-2061370.html

17) http://festival.1september.ru/articles/538170/